

Dinâmica da Dependência Usando Cópulas com Mudança de Regime

Oswaldo Candido da Silva Filho

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Programa de Pós-Graduação em Economia - PPGE

Flávio Augusto Ziegelmann

Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Departamento de Estatística e Programa de Pós-Graduação em Economia - PPGE

Resumo

Neste trabalho, utilizando cópulas condicionais tempo-variantes como introduzido em Patton (2006), propomos uma nova abordagem para mensurar a dinâmica da dependência incorporando a ela uma mudança markoviana. Ou seja, o parâmetro de dependência foi permitido variar deterministicamente, de acordo com uma equação de evolução, e também de acordo com um processo estocástico de Markov, onde o termo de intercepto da equação de evolução da dependência segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois regimes. Foram feitas algumas simulações de Monte Carlo para comparar os modelos com e sem mudança de regime e uma aplicação do modelo proposto a dados reais, onde o erro padrão para as estimativas foram computados via *block bootstrap*.

Palavras-chave: Dependência assimétrica, Cópulas, *Markov switching*, *Block bootstrap*.

Códigos JEL: C15, C46, G15.

1. Introdução

O estudo das estruturas de dependência entre mercados financeiros internacionais tem atraído o interesse de pesquisadores, tanto no campo teórico quanto empírico, e de profissionais. Visando controlar os riscos que se deparam, gerentes de carteiras de ativos e reguladores precisam levar em consideração a dependência entre os ativos no mercado financeiro internacional por exemplo. Questões como a existência de estruturas de dependência assimétricas, como uma maior dependência em determinado período ou mercado, têm forte influência na avaliação e gestão do risco. Além disso, os benefícios advindos da diversificação internacional de ativos podem, também, ser consideravelmente afetados por estas estruturas de dependência assimétricas. Assim, determinar apropriadamente a estrutura de dependência entre ativos é de grande importância na gestão de carteiras e risco, precificação de opções e *hedging*.

Ativos nos mercados financeiros internacionais tendem a apresentar dependência assimétrica, como atestado em [6]. Isso significa que em tempos de crise os retornos dos índices tendem a ser mais dependentes do que em tempos de bonança. Além disso, o processo gerador desses retornos pode ser não linear, não estacionário com caudas pesadas, e as distribuições marginais podem ser assimétricas, leptocúrticas e/ou apresentar heterocedasticidade condicional. Assim, é necessário construir modelos flexíveis o bastante para lidar com essas características. Para lidar com os problemas de heterocedasticidade e caudas pesadas nas distribuições marginais, têm sido utilizados modelos da família GARCH, como descrito em [8], [4] e [12], porém ainda considerando principalmente distribuições elípticas.

Para lidar com estruturas de dependência assimétricas na distribuição multivariada de variáveis aleatórias, principalmente financeiras, tem crescido consideravelmente a utilização de modelos baseados em funções cópula. A principal característica desses modelos é a possibilidade de dividir o problema de identificação da distribuição conjunta em dois componentes: densidades marginais e estrutura de dependência. A modelagem consiste em especificar primeiramente as distribuições marginais, onde é possível explorar muito bem os fatos estilizados sobre variáveis financeiras de forma unidimensional (como a utilização dos modelos GARCH referidos acima), e segundo, determinar a função cópula apropriada, que caracteriza completamente a estrutura de dependência entre as variáveis.

Recentemente, alguns autores têm trabalhado características como não normalidade e a dinâmica da dependência ao longo do tempo, utilizando modelos baseados em cópulas. [23], a partir da definição de cópula condicional, estuda a estrutura de dependência não linear permitindo o parâmetro de dependência variar ao longo do tempo de maneira análoga aos modelos de variância condicional, sendo as marginais modeladas como processos GARCH. [17] utilizam esses modelos cópula-GARCH de maneira semelhante para estudar a estrutura de dependência entre mercados financeiros internacionais. Outros autores têm considerado também modelos com mudança de regime para cópulas condicionais, como [6], [28] e [24]. Eles encontraram significativa assimetria na estrutura de dependência entre os retornos.

Neste trabalho, propomos um novo procedimento para capturar a estrutura de dependência ao longo do tempo. Em nosso modelo, além do parâmetro de dependência ser permitido variar deterministicamente de acordo com [23], ele também muda de acordo com

um processo estocástico markoviano, onde o termo de intercepto da dependência segue uma cadeia de Markov de primeira ordem com dois regimes.

Em nossa abordagem, estimamos no primeiro estágio modelos *skewed-t* GARCH para as distribuições marginais, enquanto no segundo estágio estimamos o parâmetro de dependência via copulas. Para avaliar a estrutura de dependência utilizamos a medida de dependência caudal. A escolha do modelo *skewed-t* GARCH univariado para as distribuições marginais assegura que qualquer assimetria encontrada na estrutura de dependência multivariada reflete a própria dependência e não devendo ser atribuída a alguma má especificação na modelagem das marginais.

Observe que o nosso processo de estimação, via máxima verossimilhança, ocorre em dois estágios. Devido a essa divisão no processo, o modelo não leva em consideração a incerteza sobre os estimadores simultaneamente. Assim, devido aos efeitos das estimativas dos parâmetros dos modelos GARCH no primeiro passo, a matriz de variâncias-covariâncias assintótica para os estimadores das cópulas em nosso caso pode ser diferente daquela para estimadores resultantes do uso de verossimilhanças completas. Assim, visando obter erros padrão adequados, calculamos a matrix de variâncias-covariâncias, e portanto os erros-padrão para os estimadores, via *block bootstrap*.

Através de simulações de Monte Carlo, comparamos o modelo proposto àquele sem mudança de regime, utilizado em [30], no intuito de avaliar o desempenho dos modelos. Aplicamos nosso modelo também a dados reais, visando medir e avaliar a estrutura de dependência entre o índice BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e os índices FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*) e S&P500 (*Standard and Poor 500 index*).

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: nas seções 2 e 3, são apresentados aspectos metodológicos sobre as cópulas, dependência caudal e o modelo copula-GARCH; na seção 4 discutimos os procedimentos de estimação em um contexto com mudança de regime e também a obtenção dos erros-padrão adequados via *block bootstrap*; na seção 5 aplicamos o modelo proposto a dados simulados e comparamos os resultados aos obtidos com o modelo sem mudança de regime; na seção 6 é feita uma aplicação empírica a dados reais sobre os retornos de índices de mercados financeiros, e na última seção são apresentadas algumas considerações finais.

2. Cópulas: conceitos básicos

De acordo com [29], uma cópula n -dimensional $C(u_1, \dots, u_n)$ é uma função de distribuição multivariada com domínio $[0, 1]^n$, cujas distribuições marginais são uniformes no intervalo $[0, 1]$. E que, para toda distribuição conjunta $H(x_1, \dots, x_n)$ com marginais $F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)$, podemos escrever

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (1)$$

Se F_1, \dots, F_n são todas contínuas, então C é uma única cópula associada a H e pode ser obtida da seguinte forma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (2)$$

onde $u_1 = F_1(x_1), \dots, u_n = F_n(x_n)$.

A função densidade associada à função de distribuição conjunta em (1) pode ser obtida facilmente, pois F_1, \dots, F_n e C são n -diferenciáveis. Assim, para o caso bivariado, essa função densidade é dada por

$$h(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \prod_{i=1}^2 f_i(x_i) \quad (3)$$

onde h é a função densidade associada a H , f_i é função densidade para cada marginal e c é a densidade cópula, que derivada a partir de (1) é dada por:

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{h(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2))}{\prod_{i=1}^2 f_i(F_i^{(-1)}(u_i))} \quad (4)$$

As cópulas freqüentemente utilizadas na literatura em finanças assumem formas elípticas, são as cópulas gaussiana (Normal) e *t-student*. São chamadas elípticas porque estão associadas a uma forma quadrática de correlação entre as marginais. A estrutura de dependência associada a essa família de cópulas é o bem conhecido coeficiente de correlação de Pearson, que pertence ao intervalo $[-1, 1]$ (-1 perfeita correlação negativa e 1 perfeita correlação positiva). Como consequência dessas características, essas distribuições são simétricas.

Outras cópulas que têm sido utilizadas são as arquimedianas, que, dependendo da forma funcional do fator gerador¹ associado a elas, podem ter a medida de dependência pertencendo aos mais diversos intervalos de variação. Um exemplo pode ser dado pelas cópulas utilizadas na teoria de valores extremos (EVT - *Extreme Value Theory*), onde podemos citar a cópula de [11] que permite apenas estruturas de dependência positivas (ou na cauda superior), cujo parâmetro pertence ao intervalo $[0, +\infty)$. Essa diversidade de funções cópula com estruturas específicas de dependência impossibilitaria uma comparação entre diferentes formas funcionais para cópulas. Para tornar possível esta comparação demos ênfase a uma medida de dependência conhecida como *Tail dependence*² (dependência caudal)³, que é definida a seguir.

Definição 1. Se $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[U_1 \leq \epsilon, U_2 \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pr[U_2 \leq \epsilon, U_1 \leq \epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{C(\epsilon, \epsilon)}{\epsilon} = \tau^L$ existe, a cópula C possui dependência na cauda inferior se $\tau^L \in (0, 1]$. Caso contrário, a cópula C não possui dependência na cauda inferior. Da mesma maneira, se o limite $\lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr[U_1 > \delta, U_2 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \Pr[U_2 > \delta, U_1 > \delta] = \lim_{\delta \rightarrow 1} \frac{(1 - 2\delta + C(\delta, \delta))}{1 - \delta} = \tau^U$ existe, a cópula C possui dependência na cauda superior se $\tau^U \in (0, 1]$. Caso contrário, a cópula C não possui dependência na cauda superior.

¹Esse fator gerador, para cópulas arquimedianas, precisa satisfazer certos critérios como convexidade entre outros. Ver [21] para maiores detalhes.

²Para maiores detalhes ver [5], [21], [23]

³Outras medidas de dependência têm sido utilizadas para tentar comparar a dependência entre cópulas, como as medidas de concordância como τ de Kendall, ρ de Spearman e o índice de cograduação de Gini, ver [21].

O uso do conceito de dependência caudal nos permite investigar qual modelo é capaz de reproduzir fatos empíricos sobre mercados financeiros. Podemos pensar o coeficiente de dependência caudal como sendo a probabilidade de um evento extremo ocorrer em um mercado dado que este evento extremo ocorre em um outro mercado. Além disso, a dependência caudal é completamente definida pela estrutura de dependência, neste caso a cópula associada, e não é afetada pelas variações nas distribuições marginais.

Existe um grande número de formas funcionais as quais a cópula C pode assumir. Em [21] podemos encontrar diversos exemplos e saber como construir uma função cópula. Para nossos propósitos vamos testar quatro formas funcionais específicas com características distintas. São elas⁴:

Cópula de Gumbel - A estrutura de dependência associada a esta cópula é apenas caudal superior.

$$C_G(u_1, u_2|\theta) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad \theta \in [0, +\infty)$$

Cópula de Gumbel (Rotated) - Que possui estrutura de dependência caudal inferior apenas.

$$C_{RG}(u_1, u_2|\theta) = u_1 + u_2 - 1 + C_G(1 - u_1, 1 - u_2|\theta), \quad \theta \in [0, +\infty)$$

Cópula Joe-Clayton simetrizada

$$C_{SJC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 0.5 \cdot (C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2|\tau^U, \tau^L) + u_1 + u_2 - 1)$$

onde C_{JC} é a cópula de Joe-Clayton, também chamada "BB7", dada por

$$C_{JC}(u_1, u_2|\tau^U, \tau^L) = 1 - \left(1 - \left\{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\right\}^{-1/\gamma}\right)^{-1/\kappa}, \quad \text{com}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= 1/\log_2(2 - \tau^U), \\ \gamma &= -1/\log_2(\tau^L) \quad \text{e} \quad \tau^U, \tau^L \in (0, 1). \end{aligned}$$

Essa cópula possui dependência caudal tanto inferior quanto superior que são independentes entre si. Além disso, τ^U e τ^L representam as medidas de dependência caudal superior e inferior, respectivamente.

Cópula Normal - A cópula Normal não possui dependência caudal e a medida de dependência é o coeficiente de correlação linear.

$$C_N(u_1, u_2|\rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds, \quad \rho \in (-1, 1).$$

⁴Apresentaremos apenas a forma bivariada das cópulas, pois, as utilizaremos nessa dimensão.

Cópula t-student - Da mesma forma que a cópula Normal, a cópula t-student tem como medida de dependência o coeficiente de correlação linear. Porém, essa cópula, apresenta dependência caudal simétrica. Ou seja, a dependência nas caudas tanto inferior quanto superior é simétrica.

$$C_t(u_1, u_2 | \rho, \nu) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{r^2 - 2\rho rs + s^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dr ds$$

3. Modelo cópula-GARCH

Considerando $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})$ um vetor bidimensional de séries temporais, podemos representar o nosso modelo cópula-GARCH como

$$H(\mathbf{x}_t | \boldsymbol{\mu}, \mathbf{h}_t) = C_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t} | \mu_1, h_{1t}), F_2(x_{2t} | \mu_2, h_{2t})) \quad (5)$$

sendo $C_{\theta_{ct}}$ a função cópula com parâmetro de dependência associado, θ_{ct} , variante no tempo e $F_i(x_{it} | \mu_i, h_{it})$, $i = 1, 2$, as distribuições marginais que seguem um processo GARCH univariado padrão

$$\begin{aligned} x_{it} &= \mu_i + h_{it}^{1/2} \varepsilon_{it} \\ h_{it} &= \omega_i + \beta_i h_{it-1} + \alpha_i \varepsilon_{it-1}^2 \end{aligned}$$

onde h_{it} é a variância condicional de x_{it} dadas as informações passadas, ε_{it} é uma variável independente e identicamente distribuída com $\omega_i, \beta_i, \alpha_i > 0$ e $\alpha_i + \beta_i < 1$ para assegurar $h_{it} > 0$ e covariância estacionária, respectivamente. Admitimos, também, que o termo aleatório segue uma distribuição *skewed-t*, $\varepsilon_{it} \sim \text{skewed-t}(\nu_i, \lambda_i)$, onde a densidade *skewed-t* é dada por

$$g(z | \nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z \geq -a/b \end{cases}$$

as constantes a , b e c são

$$a = 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1}\right), b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2, c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}$$

com os parâmetros ν e λ representando os graus de liberdade e assimetria, respectivamente. Assim, a função de distribuição condicional para cada marginal é dada por $F_i(x_{it} | \mu_i, h_{it}) = \text{skewed-t}_{\nu_i, \lambda_i}\left((x_{it} - \mu_i)h_{it}^{-1/2}\right)$

Como dito anteriormente, o parâmetro de dependência é permitido variar ao longo do tempo. A sua evolução temporal segue um processo ARMA(1,10) restrito onde o intercepto muda de acordo com uma cadeia de Markov de primeira ordem, ou seja, $\theta_{ct, S_t} =$

$\Lambda(\omega_c^{S_t} + \beta_c \theta_{ct-1} + \psi_t)$ e $S_t \sim \text{Markov}(P)$ onde S_t pode assumir dois estados e P é uma matriz (2x2) de transição entre esses estados e a cadeia de Markov (ou processo de Markov) é irreduzível e ergódica⁵. ψ_t é uma "variável forçada" definida como a média absoluta da diferença entre u_1 e u_2 para as cópulas RGC e SJC, dada por $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|$ e a média dos produtos $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j})$ e $\alpha_c \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} T_\nu^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot T_\nu^{-1}(u_{2,t-j})$ ⁶ para as cópulas Normal e T ao longo de 10 períodos (Ver [23]). $\Lambda(\cdot)$ é uma transformação logística específica para cada função cópula no intuito de manter o parâmetro de dependência no intervalo adequado à cada função cópula especificada acima. Além disso, θ_{ct} , como medida de dependência, vai apresentar as características das cópulas descritas na subseção anterior. Porém, vamos trabalhar apenas com a dependência caudal através das transformações apropriadas de acordo com a definição 1 (exceto com a cópula Normal, que não apresenta dependência caudal).

4. Estimação

Podemos escrever a função de log-verossimilhança da seguinte maneira:

$$l(\theta|\mathbf{x}_t) = \sum_{t=1}^T \log \left(c_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t}|\theta_1), F_2(x_{2t}|\theta_2)|\theta_{ct,S_t}) \prod_{i=1}^2 f_{it}(x_{it}|\theta_i) \right) \quad (6)$$

onde $\theta_i = \mu_i, h_{it}$, $i = 1, 2$, e θ representa o vetor composto por todos os parâmetros do modelo.

A avaliação da função de log-verossimilhança em (6) pode ser computacionalmente muito intensiva devido à existência de vários processos não observados como h_{1t} , h_{2t} e S_t . Como (6) é uma função separável, podemos utilizar o método de máxima verossimilhança em dois estágios ou, em outras palavras, podemos utilizar o método inferência iniciando pelas marginais (*Inference from the Margins*), IM, proposto por [16].

Este método consiste em estimar em um primeiro estágio os parâmetros das distribuições marginais univariadas e, utilizando essas estimativas, estimar em um segundo estágio o parâmetro de dependência entre as marginais. Essa abordagem tornou populares os modelos cópula-GARCH⁷, onde as marginais são modeladas como seguindo um processo GARCH univariado e a estrutura de dependência é especificada a partir da escolha da função cópula. Assim, podemos estimar em uma primeira etapa as distribuições para as marginais, separadamente, de acordo com a forma descrita anteriormente, e em uma segunda etapa estimar a estrutura de dependência utilizando as estimativas para as marginais.

A estimação das distribuições marginais é direta, pois segue o processo de estimação dos modelos GARCH tradicionais. Porém, a estimação do parâmetro de dependência através da cópula merece algumas discussões adicionais, pois θ_{ct} depende da variável discreta S_t , com as características definidas acima, que é não-observável. Para a estimação do segundo estágio utilizaremos o filtro de Kim descrito em [19].

⁵Ver [18] para maiores detalhes.

⁶Onde Φ^{-1} e T_ν^{-1} são as inversas da Normal e *t-student c.d.f.*

⁷Para mais detalhes ver [7], [28], [14], [2], [23], [17].

4.1. Estimação da cópula

A log-verossimilhança em (6) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
l(\theta|\mathbf{x}_t) &= \sum_{t=1}^T \log \left(c_{\theta_{ct}}(F_1(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}, \theta_1), F_2(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}, \theta_2)|\theta_{ct, S_t}) \prod_{i=1}^2 f_{it}(x_{it}|\mu_i, h_{it}, \theta_i) \right) \\
&= \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}; \theta_1) + \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}; \theta_2) \\
&\quad + \sum_{t=1}^T \log c_t(u_{1t}, u_{2t}|\mu_1, \mu_2, h_{1t}, h_{2t}; \theta_{ct, S_t}) \\
l(\theta|\mathbf{x}_t) &= \ell_{f_1}(\theta_1) + \ell_{f_2}(\theta_2) + \ell_c(\theta_{ct, S_t})
\end{aligned}$$

onde $\ell_{f_1}(\theta_1) = \sum_{t=1}^T \log f_{1t}(x_{1t}|\mu_1, h_{1t}; \theta_1)$, $\ell_{f_2}(\theta_2) = \sum_{t=1}^T \log f_{2t}(x_{2t}|\mu_2, h_{2t}; \theta_2)$ e $\ell_c(\theta_{ct, S_t}) = \sum_{t=1}^T \log c_t(u_{1t}, u_{2t}|\mu_1, \mu_2, h_{1t}, h_{2t}; \theta_{ct, S_t})$, e $\ell_{f_1}(\theta_1)$ e $\ell_{f_2}(\theta_2)$ são as funções de log-verossimilhança que foram utilizadas para estimar os parâmetros das distribuições marginais no primeiro estágio do processo de estimação.

Assim, podemos passar para a estimação de $\ell_c(\theta_{ct, S_t})$. Reescrevendo $\ell_c(\theta_{ct, S_t})$, levando em consideração as variáveis não observadas e decompondo c_t , temos:

$$\ell_c = \sum_{t=1}^T \log \left(\sum_{S_t=0}^1 c_t(u_1, u_2|S_t, w_{t-1}) \Pr[S_t|w_{t-1}] \right) \quad (7)$$

Como os estados S_t são não observados, para avaliar a log-verossimilhança em (7), precisamos calcular os pesos $\Pr[S_t|w_{t-1}]$ para $S_t = 0$ e $S_t = 1$, pois, estamos considerando apenas dois estados. Aplicando o filtro de Kim temos o seguinte algoritmo de filtragem que deve ser iterado para $t = 1, \dots, T$:

(a) Predição de S_t

$$\Pr[S_t = l|w_{t-1}] = \sum_{k=0}^1 p_{kl}^{t-1} \Pr(S_{t-1} = k|w_{t-1})$$

para $l = 0, 1$ e $p_{kl}^{t-1} = \Pr(S_t = l|S_{t-1} = k, w_{t-1})$, que é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado k e l .

(b) Filtragem de S_t

$$\Pr(S_t = l|w_t) = \frac{c_t(u_1, u_2|S_t = l, w_{t-1}) \Pr[S_t = l|w_{t-1}]}{\sum_{k=0}^1 c_t(u_1, u_2|S_t = k, w_{t-1}) \Pr[S_t = k|w_{t-1}]}$$

onde $w_t = [w_{t-1}, u_{1t}, u_{2t}]$. Em $t = 1$, o filtro é inicializado usando as probabilidades estacionárias de S_t para $\Pr(S_0 = k|w_0)$.

O filtro descrito acima nos dá a distribuição de probabilidade de S_t dadas as informações até t . Porém, como estamos lidando com séries temporais, é oportuno conhecer a distribuição de S_t dado o conjunto de informação completo da amostra, ou seja, podemos melhorar as estimativas dentro da amostra utilizando todo T (em contraste à predição e à filtragem), já que em séries temporais podemos extrair do futuro informações sobre o passado.

Assim, calculamos as probabilidades suavizadas de S_t dadas por $\Pr(S_t = l|w_T) = \sum_{k=0}^1 \Pr(S_t = l, S_T = k|w_T)$, onde $\Pr(S_t = l, S_T = k|w_T)$ pode ser obtida recursivamente a partir das probabilidades filtradas. Esse processo de suavização funciona como um algoritmo *backward-smoothing* como segue:

1. Dado o processo de filtragem supracitado, obtemos $\Pr(S_t = l|w_t)$ para $l = 0, 1$ e $t = 1, \dots, T$.
2. Então podemos inicializar o algoritmo de suavização em $t = T$ e retroceder no tempo recursivamente, sendo $\Pr(S_T = l|w_T)$ igual a probabilidade filtrada em $t = T$.
3. Para cada $t = T-1, T-2, \dots, 1$, a distribuição de probabilidade suavizada $\Pr(S_t = l|w_T)$ é dada por

$$\Pr(S_t = l|w_T) = \sum_{k=0}^1 \frac{p_{lk}(t) \Pr(S_t = l|w_t) \Pr(S_{t+1} = k|w_T)}{\sum_{j=0}^1 p_{jk}(t) \Pr(S_t = j|w_t)}$$

onde $p_{lk}(t) = \Pr(S_{t+1} = k|S_t = l, w_t)$ é simplesmente a probabilidade de transição entre os estado l e k .

Em $t = 0$ o algoritmo suavizador nos dá $\Pr(S_0 = l|w_T)$ que podemos utilizar como valor inicial no algoritmo de filtragem. Assim, completamos o algoritmo *forward-filtering-backward-smoothing* e podemos maximizar (7) em relação aos parâmetros do modelo diretamente de forma numérica.

4.2. Erro-padrão estimado: bootstrap por blocos

Observe que o estimador por IFM de $\theta, \hat{\theta}$, foram obtidos através da solução de

$$\left(\frac{\partial \ell_{f_1}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell_{f_2}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \ell_c}{\partial \theta_{ct, S_t}} \right)' = 0$$

separadamente, ou seja, estimamos primeiro os parâmetros para as marginais e na sequência os parâmetros da cópula.

Assumindo que certas condições de regularidade para estimadores por máxima verossimilhança são satisfeitas, tanto para o modelo multivariado quanto para as marginais, os parâmetros estimados via IFM podem ser considerados assintoticamente normais multivariados (Ver [15] e [22]). Logo, temos que

$$\sqrt{T} \left(\hat{\theta} - \theta_0 \right) \rightarrow \mathbf{N} \left(0, \mathcal{G}^{-1}(\theta_0) \right),$$

onde $\mathcal{G}(\theta_0)$ é a matriz de informação de [10].

Definindo a função *score* para nosso problema como

$$s(\theta) = \left(\frac{\partial \ell_{f_1}}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \ell_{f_2}}{\partial \theta_2}, \frac{\partial \ell_c}{\partial \theta_{ct, S_t}} \right)',$$

a matriz de Godambe será dada por $\mathcal{G}(\theta_0) = D^{-1}V(D^{-1})'$, onde $D = \mathbf{E}[\partial s(\theta)/\partial \theta]$ e $V = \mathbf{E}[s(\theta)s(\theta)']$.

A estimação dessa matriz de variância-covariância envolve o cálculo de muitas derivadas em funções de inferência (em nosso caso funções *score* para as funções de verossimilhança) o que pode ser muito tedioso devido a intensidade computacional requerida. Além disso, o maior problema na aplicação do método IFM é a perda de eficiência (em termos de consistência dos estimadores e normalidade assintótica quando comparado ao método de máxima verossimilhança completa) nas estimações, pois a estimação dos parâmetros das marginais, primeiro passo do processo, ignora a relação de dependência entre θ_1 e θ_2 na estimação de $\hat{\theta}_{ct, S_t}$ (ver [20]).

Assim, para calcular os erros-padrão adequados utilizamos o método *block bootstrap*⁸ para estimar a matriz de variância-covariância. O tamanho ótimo do bloco foi calculado de acordo com [26] e [27]. Em outras palavras, usamos o seguinte procedimento:

1. Obter as estimativas dos parâmetros via IFM (como descrito nas subseções anteriores).
2. Amostrar n/l sub-amostras (com reposição) a partir das observações e gerar uma série temporal de tamanho n . Onde l é o tamanho do bloco.
3. Reestimar os parâmetros utilizando a série temporal gerada.
4. Repetir os passos (2) e (3) R vezes.
5. Usando a matriz de variância-covariância $R^{-1} \sum_{r=1}^R (\hat{\Omega}(r) - \hat{\Omega})(\hat{\Omega}(r) - \hat{\Omega})'$, onde $\hat{\Omega}(r)$ é o vetor de parâmetros estimados em cada replicação r e $\hat{\Omega}$ é o vetor de parâmetros obtidos em (1), calcular os erros-padrão para os parâmetros.

5. Exemplos numéricos: simulação de Monte Carlo

Nesta seção, nós consideramos dados simulados para avaliar o modelo proposto. Estes dados foram obtidos de duas origens distintas: (i) simulados a partir de um modelo com mudança markoviana (2 regimes), ou seja, a partir do modelo cópula-GARCH

⁸Estimamos dois tipos de procedimentos para a aplicação do *block bootstrap*: *stationary bootstrap* (SB) e *non-overlapping block bootstrap* (NBB). Os resultados que apresentamos referem-se ao NBB. Dado o tamanho da amostra utilizada, a variância das estimativas tanto via SB quanto NBB tendem a serem iguais, porém, o viés no NBB é menor (para maiores detalhes ver [25] e [13]).

tempo-variante descrito nas seções anteriores, e (ii) simulados a partir de um modelo sem mudança de regime (1 regime), também baseado no modelo cópula-GARCH tempo-variante descrito em [23] e aplicado a índices de mercados financeiros por [30]. No experimento, foram utilizadas séries temporais bivariadas, geradas a partir das cópulas Normal e Joe-Clayton Simetrizada (SJC), de tamanho $T = 1000$, $T = 2000$, $T = 5000$ ⁹, replicadas 1000 vezes. Escolhemos apenas as cópulas Normal e SJC neste exercício de simulação visando observar o desempenho do modelo quando não há dependência caudal e quando há a presença de dependência nas caudas inferior e superior independentes entre si.

A dinâmica da dependência para os dois modelos é dada por:

Cópula Normal

Modelo 1 (com mudança de regime):

$$\rho_{ct}(S_t) = \Lambda([0.1 \cdot (1 - S_t) + 0.5 \cdot S_t]) + 1.6 \cdot \rho_{ct-1} - 0.06 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j})$$

onde $S_t = 0$ ou 1 .

Modelo 2 (sem mudança de regime):

$$\rho_{ct} = \Lambda(0.3 + 0.14 \cdot \rho_{ct-1} + 1.6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} \Phi^{-1}(u_{1,t-j}) \cdot \Phi^{-1}(u_{2,t-j}))$$

Cópula SJC

Modelo 1 (com mudança de regime):

$$\begin{aligned} \tau_{ct}^L(S_t) &= \Lambda([0.3 \cdot (1 - S_t) + 1.1 \cdot S_t]) - 0.5 \cdot \tau_{ct-1}^L - 3 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \\ \tau_{ct}^U(S_t) &= \Lambda([0.9 \cdot (1 - S_t) + 2.6 \cdot S_t]) - 2 \cdot \tau_{ct-1}^U - 6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}| \end{aligned}$$

onde $S_t = 0$ ou 1 .

Modelo 2 (sem mudança de regime):

$$\begin{aligned} \tau_{ct}^L &= \Lambda(-1.7 - 0.8 \cdot \tau_{ct-1}^L + 3.6 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|) \\ \tau_{ct}^U &= \Lambda(-1.8 - 1.2 \cdot \tau_{ct-1}^U + 4 \cdot \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} |u_{1,t-j} - u_{2,t-j}|) \end{aligned}$$

⁹A amostra começou a ser contada depois que as 1000 primeiras observações foram descartadas. A razão disso foi prevenir quanto a algum efeito dos valores iniciais sobre os parâmetros

De posse dos dados simulados, estimamos modelos com e sem mudança de regime e calculamos o erro médio entre a dinâmica da dependência original e estimada. Para comparar os modelos apresentamos os resultados através de gráficos do tipo *box plot*. As figuras de 5 a 7 mostram estes gráficos. No lado esquerdo das figuras está indicado o modelo de origem dos dados simulados e nas colunas o tamanho das amostra. As caixas representam os valores dos 1000 erros médios (um para cada réplica) correspondentes a cada modelo estimado. Para simplificar o exercício, admitimos também que acertamos a forma funcional da cópula, assim, dada a função cópula utilizada para a geração dos dados nos modelos 1 e 2, estimamos modelos com e sem mudança de regime com a mesma forma funcional do modelo original e comparamos os resultados.

Na figura 5 temos os resultados para a cópula Normal. Podemos observar que quando os dados se originam de um modelo sem mudança de regime (Modelo 2) o modelo sem mudança apresenta o melhor desempenho. A mediana está próxima a zero, a variabilidade de erro médio é menor que no modelo com mudança e essa variabilidade parece ser simétrica, como indicado pela divisão proporcional da caixa e dos alongamentos em torno da mediana¹⁰. Enquanto que no modelo com mudança a mediana é maior que a encontrada no modelo sem mudança, a variabilidade do erro médio também é maior e a dispersão desse erro é assimétrica à direita, indicando que o modelo com mudança tende a subestimar a dependência entre as variáveis. Esse resultado é o esperado e ele se mantém quando o tamanho da amostra aumenta.

Na segunda linha, na mesma figura, quando o modelo de origem apresenta mudança de regime (Modelo 1). Percebemos que a mediana para os dois modelos estimados são próximas uma da outra e próximas de zero independentemente do tamanho da amostra. Na amostra com $T = 1000$, o modelo sem mudança apresenta uma dispersão maior que no modelo com mudança e essa dispersão tende a apresentar uma certa assimetria à esquerda, indicando uma superestimação do parâmetro de dependência. Essa assimetria diminui quando o tamanho da amostra aumenta. Quando a amostra tem tamanho $T = 2000$, esses resultados se mantêm. Nos dois casos, como esperado, o modelo com mudança apresenta um melhor desempenho, pois mostrou uma menor variabilidade. Quando $T = 5000$, o modelo sem mudança passa a apresentar uma variabilidade menor que no modelo com mudança e um melhor desempenho. Esse último resultado é contrário ao esperado.

As figuras 6 e 7 apresentam os *box plots* para os parâmetros de dependência caudal inferior e superior, respectivamente, associados a cópula SJC. Com relação a dependência na cauda inferior (figura 6), percebemos que quando o modelo de origem não tem mudança de regime (Modelo 2) a mediana para os dois modelos estimados é menor que zero, a variabilidade do erro médio tende a ser simétrica e o modelo com mudança de regime apresenta uma menor dispersão quando o tamanho da amostra aumenta. Além disso, o posicionamento das caixas abaixo de zero indica que ambos os modelos superestimam a dependência caudal inferior. O modelo sem mudança obteve um melhor desempenho do que o modelo com

¹⁰O alongamento, além da caixa, representa o valor mais extremo dentro de uma extensão de 1.5 vezes o intervalo interquartil (entre primeiro e o terceiro quartil), representado pela caixa. O corte no retângulo na altura da mediana representa o intervalo de confiança a 95% para a mesma.

mudança pois a mediana é mais próxima de zero e, para o tamanho da amostra $T = 1000$, apresenta uma menor variabilidade. Quando o tamanho da amostra aumenta o melhor modelo continua sendo aquele sem mudança, porém a variabilidade dos erros no modelo com mudança tende a diminuir.

Quando processo gerador dos dados é o modelo com mudança de regime (Modelo 1), notamos, através da segunda linha de gráficos na figura 6, que o erro médio em relação ao modelo sem mudança apresenta uma mediana maior que zero e uma variabilidade maior que o modelo com mudança de regime. O modelo com mudança mostra uma mediana próxima a zero. O erro médio em ambos os modelos apresenta uma dispersão simétrica como indica o posicionamento da caixa e os alongamentos divididos de maneira proporcional em torno da mediana. Esse resultado se mantém a medida que o tamanho da amostra aumenta. Dado que a variabilidade do erro no modelo com mudança é menor, como pode ser visto pela menor amplitude da caixa e dos alongamentos, e a mediana é mais próxima de zero, o modelo com mudança apresenta um melhor desempenho.

Observando os resultados para a dependência caudal superior (figura 7), percebemos que quando a origem dos dados é um modelo sem mudança de regime (Modelo 2), o modelo com mudança de regime, apesar de apresentar uma menor variabilidade, tende a superestimar o parâmetro de dependência caudal superior, como indicado pela mediana negativa e o posicionamento da caixa abaixo de zero, independentemente do tamanho da amostra. O modelo sem mudança mostra uma mediana próxima de zero e a variabilidade do erro médio tende a diminuir quando o tamanho da amostra aumenta. A distribuição do erro em ambos os modelos tende a ser simétrica. Assim, o melhor modelo é o sem mudança que apresenta uma mediana mais próxima de zero.

Quando o modelo originário possui mudança de regime (Modelo 1), o modelo sem mudança tende a superestimar o parâmetro de dependência caudal superior como pode ser constatado pela posição abaixo de zero tanto da caixa quanto da mediana. O erro em ambos os modelos tem uma distribuição simétrica e o grau de dispersão diminui quando o tamanho da amostra aumenta. Neste caso, o modelo com mudança é a melhor escolha. Isto é confirmado pela menor amplitude tanto da caixa quanto dos alongamentos, quando comparado ao modelo sem mudança, além dessa amplitude diminuir quando o tamanho da amostra aumenta.

Uma característica que podemos notar no modelo que propomos é que o erro médio tende a ter uma variabilidade menor que o modelo sem mudança de regime, exceto quanto a distribuição é Normal e o processo gerador dos dados é um modelo sem mudança de regime.

6. Análise dos dados empíricos

Para nossa análise, utilizamos três índices de mercados financeiros: FTSE100 (*Financial Times and London Stock Exchange Index*), BOVESPA (índice da Bolsa de Valores de São Paulo) e S&P500 (*Standard and Poor 500 index*). Todos os dados são de frequência diária compreendendo o período de 1º de Janeiro de 1999 a 10 de Julho de 2009, totalizando 2435 observações. A Tabela 1 mostra algumas estatísticas descritivas para as três

séries. Elas mostram sinais claros de não normalidade com assimetria negativa, exceto para BOVESPA, e coeficiente de curtose acima de 3 para todas as séries.

6.1. Distribuições marginais

Os resultados para cada *skewed-t* GARCH univariado são apresentados na Tabela 2. Podemos perceber que o coeficiente de assimetria é negativo e significativo para todas as séries. A assimetria negativa que encontramos captura o fato de que a distribuição das marginais apresenta cauda pesada à esquerda (cauda inferior). Ou seja, grandes retornos negativos, como observado em períodos de crise, são mais prováveis que grandes retornos positivos de mesma magnitude. Observe também que o baixo valor dos graus de liberdade, e também dos respectivos desvios-padrão, para o termo de perturbação dos retornos do BOVESPA e S&P500 indicam que eles possuem caudas mais extensas, neste caso, a utilização da distribuição Normal não seria apropriada. Além disso, o elevado valor de β_i (acima de 85%) indica uma alta persistência na volatilidade. Portanto, torna-se claro que a utilização das distribuições multivariadas Normal ou *t-student* não seriam apropriadas para descrever a distribuição conjuntas dos retornos em questão.

Podemos notar também que não há autocorrelação nos resíduos, nem nos quadrados dos resíduos, como mostrado pela estatística Q de Ljung-Box, o que pode indicar que o modelo está bem especificado. Além disso, os testes Kolmogorov-Smirnov (KS), Berkowitz (Berk) e Anderson-Darling (AD), que utilizamos para testar as marginais transformadas, não indicou evidências de que elas não sejam uniformes(0,1).

6.2. Cópulas

A Tabela 3 mostra os resultados para as estimações das quatro cópulas, descritas anteriormente, com mudança de regime. Pudemos verificar que ambos os regimes, de alta e baixa dependência, são persistentes, como as elevadas probabilidades p e q indicam. Notamos também uma expressiva mudança no intercepto da dependência entre os regimes de baixa e de alta dependência.

Nas figuras 1 e 2 temos as probabilidades suavizadas, considerando o regime de alta dependência, para os pares de índices BOVESPA-S&P500 e BOVESPA-FTSE100, respectivamente. Podemos observar que a partir de 2006 a relação de dependência entre ambos pares saltou para um regime de alta dependência. Note que, a partir nesse momento começam a aparecer os primeiros indícios do que viria a ser uma das maiores crises financeiras já vista.

Observando as figuras 3 e 4, onde estão representadas as dinâmicas da dependência¹¹ capturadas pelas cópulas estimadas, podemos notar a mudança no grau de dependência a partir de 2006. No painel (a) de cada figura temos a correlação de Pearson (ρ de Pearson), que o parâmetro de dependência da cópula Normal. Note que este parâmetro sai de algo

¹¹Já estamos considerado a datação dos regimes a partir das probabilidades suavizadas mostradas nas figuras 1 e 2.

em torno de 0.5 e 0.2 para 0.8 e 0.6 a partir de 2006, nos pares BOVESPA-S&P500 e BOVESPA-FTSE100 respectivamente.

O mesmo comportamento pode ser observado para os parâmetros de dependência caudal, nas cópulas *t-student*, SJC e *rotated* Gumbel (painéis (b), (c) e (d)). Na cópula *t-student*, o parâmetro de dependência caudal, que é o mesmo para ambas as caudas, situou-se em torno de zero até pouco antes de 2006, quando passa para em média 0.25, no par BOVESPA-S&P500, e 0.1, no par BOVESPA-FTSE100. Esse resultado pode sugerir que o regime de baixa dependência não apresenta dependência nas caudas, ao passo que no regime de alta dependência a dependência caudal passa a ser positiva.

Os parâmetros de dependência caudal inferior captados pelas cópulas SJC e *rotated* Gumbel mostraram uma magnitude maior do que aqueles encontrados na cópula *t-student*, provavelmente devido a simetria imposta pela forma funcional (elíptica) desta última. Ambos os parâmetros, τ^L e θ (parâmetros de dependência caudal inferior associados às cópulas SJC e *rotated* Gumbel, respectivamente), apresentaram resultados semelhantes no par BOVESPA-S&P500, permanecendo em torno de 0.4 no regime de baixa dependência e 0.6 no regime de alta dependência. No par BOVESPA-FTSE100, o parâmetro θ apontou para uma dependência caudal inferior, no regime de baixa dependência, maior do que o parâmetro τ^L (em média 0.2 e 0.1, respectivamente). No regime de alta dependência, ambos os parâmetros situaram-se em torno de 0.4 porém, o parâmetro τ^L apresenta, aparentemente, uma volatilidade maior do que θ .

Com relação à dependência na cauda superior, τ^U , associada a cópula SJC, podemos dizer que, para o par BOVESPA-S&P500, no regime de baixa dependência, ele situou-se em torno de 0.3 e em torno de 0.6 no regime de alta dependência. Para o BOVESPA-FTSE100, ele permaneceu próximo de zero e em torno de 0.3 nos regimes de baixa e alta dependência, respectivamente.

De acordo com os resultados encontrados, podemos verificar que: (i) BOVESPA apresenta uma maior relação de dependência com o S&P500 do que com o FTSE100, pois, os parâmetros de dependência estimados para o par BOVESPA-S&P500 apresentaram magnitude maior que os estimados para o par BOVESPA-FTSE100; (ii) a dependência caudal relativamente mais baixa encontrada no regime de baixa dependência, pode indicar que, nesse regime, pode não haver dependência nas caudas ou esta é simétrica. Neste caso, pode haver não apenas uma mudança no parâmetro de dependência ao longo do tempo mas, também, uma mudança na própria estrutura de dependência. Ou seja, a forma funcional da multivariada conjunta pode mudar ao longo do tempo, alternando entre uma forma simétrica, sem dependência caudal ou com uma baixa dependência caudal, (que é o caso das distribuições elípticas) e uma forma com uma estrutura de dependência mais extrema, como a cópula *rotated* Gumbel, que utilizamos neste trabalho.

7. Considerações finais

Tratamos neste trabalho a importante questão da modelagem da estrutura de dependência entre variáveis aleatórias através de funções cópulas com parâmetros que variam ao longo do tempo. O modelo proposto incluiu um novo procedimento para capturar a

evolução temporal do parâmetro de dependência, que além de variar deterministicamente também incorpora uma mudança estocástica através de uma cadeia da Markov de primeira ordem. Tal procedimento, tanto em dados reais quanto em dados simulados, se mostrou flexível, apropriado e ofereceu boas intuições sobre a dinâmica da dependência ao longo do tempo entre índices de mercados financeiros.

No exercício com dados simulados, que utilizamos como uma maneira de avaliar e extrair mais informações sobre o modelo que propomos. Pudemos perceber que o modelo com mudança de regime e distribuição não elíptica não somente reproduziu adequadamente as características empíricas comumente encontradas em retornos de índices de mercados financeiros, como foi bem sucedido nas estimações dessas características. Percebemos indiretamente também, que retornos negativos extremos são *tail-dependent*, possui uma dependência caudal, enquanto retornos positivos extremos são *tail-independent*, tendem a ser independentes.

No experimento com dados reais, tentamos captar a estrutura de dependência, e sua evolução temporal, entre o índice BOVESPA e os índices S&P500 e FTSE100. Para isso, admitimos assimetrias nas caudas da distribuição conjunta e utilizamos a medida de dependência caudal como principal parâmetro de nossa análise. Isso é feito devido a possível assimetria e excesso de curtose encontrados nas distribuições marginais.

Conduzimos nossa análise de forma a observar a estrutura de dependência, bivariada, associada aos pares BOVESPA/S&P500 e BOVESPA/FTSE100 em dois passos. Primeiro, ajustamos modelos *skewed t*-GARCH, univariados, para as marginais e testamos, utilizando os testes de Kolmogorov-Smirnov (KS), Berkowitz (Berk) e Anderson-Darling (AD), se a transformada integral de probabilidade dos resíduos poderia ter distribuição uniforme (0,1). Para os três índices em estudo, segundo os testes, pudemos considerar que estas marginais foram bem ajustadas e que devem ser assimétricas, como mostraram as estimativas, significativas segundo seu p-valor, para λ_i , $i = \text{BOVESPA, S\&P500 e FTSE100}$.

Em um segundo momento, utilizando as estimativas para as marginais, ajustamos quatro diferentes funções cópulas tempo-variantes com mudança de regime, *Rotated Gumbel*, *SJC (Symmetrized Joe-Clayton)*, Normal e *T-student*, para estimar a distribuição conjunta dos pares supracitados e observar o comportamento da suas estruturas de dependência. Com esse modelo pudemos identificar dois regimes distintos: um com alta dependência e outro com baixa dependência. Além da diferença em termos de magnitude dos parâmetros, podemos inferir que tanto a assimetria quanto a curtose podem ser diferentes entre os regimes. Ou seja, o regime com alta dependência também pode ter maior assimetria e caudas mais pesadas. Isto pode sugerir que além de uma dependência assimétrica, onde o parâmetro de dependência muda ao longo do tempo, podemos ter a própria estrutura de dependência mudando ao longo do tempo¹². Embora tenhamos identificado os regimes como alta e baixa dependência, levando em consideração apenas as medidas de dependência nas caudas, se observarmos a cópula Normal notamos que, em ambos os regimes, o BOVESPA possui uma elevada relação de dependência com os demais índices (neste caso levando em consideração o ρ de Pearson).

Para evitar problemas relacionados ao processo de estimação em dois estágios (pois,

¹²Ver [9] para uma aplicação relacionada a estrutura de dependência mudando ao longo do tempo

dessa forma, o modelo não leva em consideração a incerteza sobre os estimadores simultaneamente), calculamos a matriz de variância-covariância através do método *block bootstrap*.

Assim, de acordo com estas considerações, o procedimento que propomos para medir a dinâmica da dependência entre variáveis aleatórias, que em outras palavras estende o modelo descrito em [23] através da introdução de uma cadeia de Markov escondida, que captura mudanças de regime não observadas, é adequado na medição e avaliação de estrutura de dependências que apresentam características assimétricas como nos índices de mercados financeiros que tratamos neste trabalho.

Referências

- [1] ANDERSON, T. W., AND D. A. DARLING (1952): “Asymptotic theory of certain goodness-of-fit criteria based on stochastic processes,” *Ann. Math. Statistics*, 23, 193–212.
- [2] BARTRAM, S., S. TAYLOR, AND Y. H. WANG (2007): “The euro and European financial market integration,” *Journal of Banking and Finance*, 31, 1461–1481.
- [3] BERKOWITZ, J. (2001): “Testing density forecasts with applications to risk management,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 5, 489–501.
- [4] BOLLERSLEV, T. (1986): “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, (94), 238–276.
- [5] CHERUBINI, U., E. LUCIANO, AND W. VECCHIATO (2004): *Copula methods in finance*, Wiley Finance. John Wiley & Sons, Ltd.
- [6] CHOLLETE, L., A. HEINEN, AND A. VALDESOGO (2008): “Modeling international financial returns with a multivariate regime switching copula,” MPRA Paper 8114, Munich Personal RePEc Archive.
- [7] DIAS, A., AND P. EMBRECHTS (2004): “Dynamic copula models for multivariate high-frequency data in finance,” .
- [8] ENGEL, R. (1982): “Autoregressive conditional heteroskedasticity models with estimation of variance of United Kingdom inflation,” *Econometrica*, (50), 987–1007.
- [9] GARCIA, R., AND G. TSAFAK (2009): “Dependence structure and extreme comovements in international equity and bond markets,” *CIRANO Scientific series*.
- [10] GODAMBE, V. P. (1960): “An optimal property of regular maximum likelihood estimation,” *Ann. Math. Statist.*, 31, 1208–1211.
- [11] GUMBEL, E. J. (1960): “Distributions des valeurs extrêmes en plusieurs dimensions,” *Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris*.
- [12] HANSEN, B. (1994): “Autoregressive conditional density estimation,” *International Economic Review*, (35), 705–730.
- [13] HÄRDLE, W., J. HOROWITZ, AND J.-P. KREISS (2001): “Bootstrap methods for time series,” *Working Paper*.
- [14] HU, L. (2006): “Dependence patterns across financial markets: a mixed copula approach,” *Applied Financial Economics*, 10, 717–729.
- [15] JOE, H. (1997): *Multivariate models and dependence concepts*. Chapman & Hall, London.
- [16] JOE, H., AND J. XU (1996): “The estimation method of inference functions for margins for multivariate models,” Technical Report 166, University of British Columbia, Department of Statistics.
- [17] JONDEAU, E., AND M. ROCKINGER (2006): “The copula-GARCH model of conditional dependencies: an international stock market application,” *Journal of International Money and Finance*, (25), 827–853.
- [18] KEMENY, J. G., AND J. L. SNELL (1960): *Finite markov chains*. Springer-Verlag.
- [19] KIM, C.-J., AND C. NELSON (1999): *State-space models with regime switching: classical and Gibbs-sampling approaches with applications*. MIT press.
- [20] LIUA, Y., AND R. LUGER (2009): “Efficient estimation of copula-GARCH models,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 53, 2284–2297.
- [21] NELSEN, R. (2006): *An introduction to copulas*. Springer-Verlag, New York.

- [22] PATTON, A. J. (2006a): “Estimation of multivariate models for time series of possibly different lengths,” *Journal of Applied Econometrics*, 21, 147–173.
- [23] ——— (2006b): “Modelling asymmetric exchange rate dependence,” *International Economic Review*, 2(47), 527–556.
- [24] PELLETIER, D. (2006): “Regime-switching for dynamic correlation,” *Journal of Econometrics*, (131), 445–473.
- [25] POLITIS, D. N. (2003): “The Impact of Bootstrap Methods on Time Series Analysis.,” *Statist. Science*, 18, 219–230.
- [26] POLITIS, D. N., AND H. WHITE (2004): “Automatic block-length selection for the dependent bootstrap,” *Econometric Reviews*, 23(1), 53–70.
- [27] POLITIS, D. N., H. WHITE, AND A. J. PATTON (2007): “Correction: Automatic block-length selection for the dependent bootstrap,” *Working Paper*.
- [28] RODRIGUEZ, J. (2007): “Measuring financial contagion: a copula approach,” *Journal of Empirical Finance*, (14), 401–423.
- [29] SCHWEIZER, B., AND A. SKLAR (1983): “Probabilistic metric spaces,” *Elsevier Science*.
- [30] SILVA FILHO, O. C., AND F. A. ZIEGELMANN (2009): “Assessing Dependence Between Financial Market Indexes Using Conditional Time-Varying Copulas: Applications to Value at Risk (VaR),” in *Fourth Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, São Paulo-Rio de Janeiro.

8. Tabelas

	FTSE100	BOVESPA	S&P500
Média	-0.000145	0.000814	-0.000139
Mediana	0.000254	0.001153	0.000399
Máximo	0.093842	0.288325	0.109572
Mínimo	-0.092646	-0.122260	-0.094695
Desvio-padrão	0.013911	0.022353	0.014360
Assimetria	-0.126056	0.725801	-0.105590
Curtose	8.541590	16.91562	9.911983

Tabela 1: Estatísticas descritivas para o log-retorno de FTSE100, BOVESPA e S&P500

	BOVESPA	S&P500	FTSE100
ω_i	0.000014 (0.000000)	0.000001 (0.000000)	0.000002 (0.000000)
α_i	0.066197 (0.000151)	0.10867 (0.004137)	0.13823 (0.005505)
β_i	0.8985 (0.000112)	0.88685 (0.001158)	0.85403 (0.003215)
ν_i	10.175 (2.8345)	8.0198 (1.3563)	17.519 (30.143)
λ_i	-0.095352 (0.000989)	-0.09229 (0.003451)	-0.13125 (0.007569)
$Q^2(10)$	0.5294	0.2237	0.9935
$Q^2(20)$	0.8995	0.6886	0.9918
KS	0.2758	0.1832	0.3544
Berk	0.2507	0.2296	0.1273
AD	0.3910	0.3520	0.1790

Tabela 2: Resultados para as distribuições marginais

Estimativas dos modelos *skewed-t* GARCH univariados com a média omitida. Erros padrão entre parênteses. As três últimas linhas mostram os testes de *goodness-of-fit* para a transformada integral de probabilidade das marginais. KS é o p-valor para o teste de Kolmogorov-Smirnov, Berk é o p-valor para o teste de Berkowitz proposto em [3] e AD é teste de Anderson-Darling [1] para uniformidade.

BOVESPA/S&P500		BOVESPA/FTSE100	BOVESPA/S&P500		BOVESPA/FTSE100
Coeficiente			Coeficiente		
<i>Normal</i>			<i>Rotated Gumbel</i>		
ω_c^0	4.5861 (0.3185)	0.1121 (0.0024)	ω_c^0	0.3332 (0.0097)	-0.8897 (0.0274)
ω_c^1	2.4842 (0.1708)	0.4596 (0.0463)	ω_c^1	-1.089 (0.1282)	-1.5898 (0.0765)
β_c	-2.7011 (0.0881)	1.6026 (0.2491)	β_c	0.3754 (0.0957)	0.5981 (0.0276)
α_c	0.0409 (0.0184)	-0.0639 (0.0112)	α_c	-0.4409 (0.1361)	-0.5403 (0.0891)
p	0.9949 (0.0004)	0.9828 (0.0038)	p	0.9939 (0.0003)	0.9895 (0.0006)
q	0.9868 (0.0009)	0.9837 (0.0042)	q	0.9899 (0.0006)	0.9877 (0.0007)
logL	616.7258	246.4187	logL	580.8390	240.8120
Coeficiente			Coeficiente		
<i>Joe-Clayton Simetrizada</i>			<i>T-student</i>		
$\omega_{c,U}^0$	0.8662 (1.7861)	-0.6244 (1.3647)	ω_c^0	1.3325 (0.0921)	1.0723 (0.0802)
$\omega_{c,U}^1$	2.6533 (0.5051)	2.2947 (0.6377)	ω_c^1	2.5377 (0.1704)	1.9853 (0.4438)
$\beta_{c,U}$	-2.090 (1.2702)	-4.9323 (0.0952)	β_c	-0.5090 (0.0726)	-1.5101 (0.0305)
$\alpha_{c,U}$	-6.0344 (1.3270)	-9.9576 (0.5492)	α_c	0.1390 (0.0244)	0.1768 (0.0017)
$\omega_{c,L}^0$	0.2843 (0.1754)	-4.5779 (1.2767)	ν^0	22.7868 (2.0186)	18.7491 (2.6023)
$\omega_{c,L}^1$	1.1107 (0.8702)	-0.7192 (0.2104)	ν^1	11.4656 (0.2288)	12.2976 (0.0937)
$\beta_{c,L}$	-0.5226 (1.7343)	-4.1666 (0.7124)	-	-	-
$\alpha_{c,L}$	-2.9645 (1.5617)	8.3531 (1.8906)	-	-	-
p	0.9974 (0.0002)	0.9924 (0.0005)	p	0.9957 (0.0003)	0.9993 (0.0001)
q	0.9989 (0.0001)	0.9895 (0.0007)	q	0.9984 (0.0001)	0.9995 (0.0000)
logL	594.8453	246.4440	logL	618.8957	250.2763

Tabela 3: Resultados para as estimações das cópulas

9. Figuras

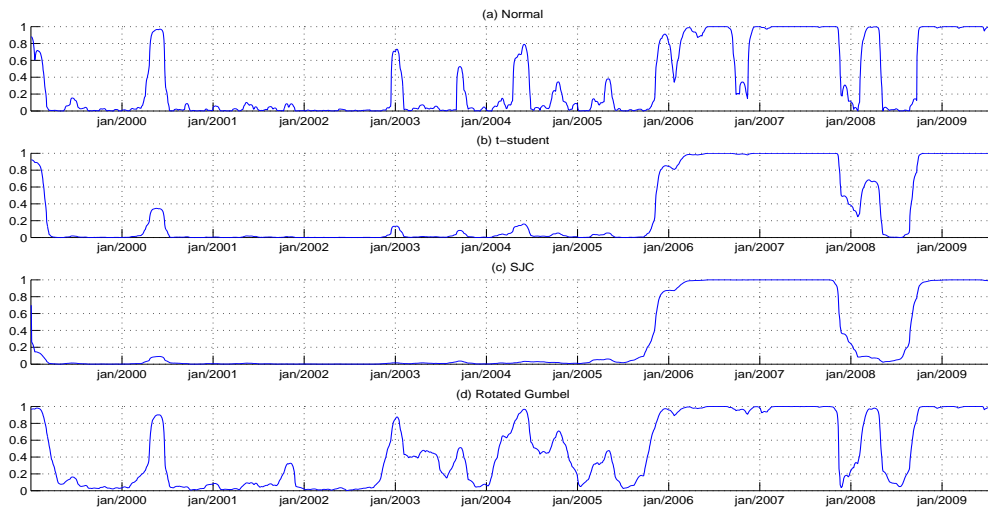


Figura 1: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-S&P500)

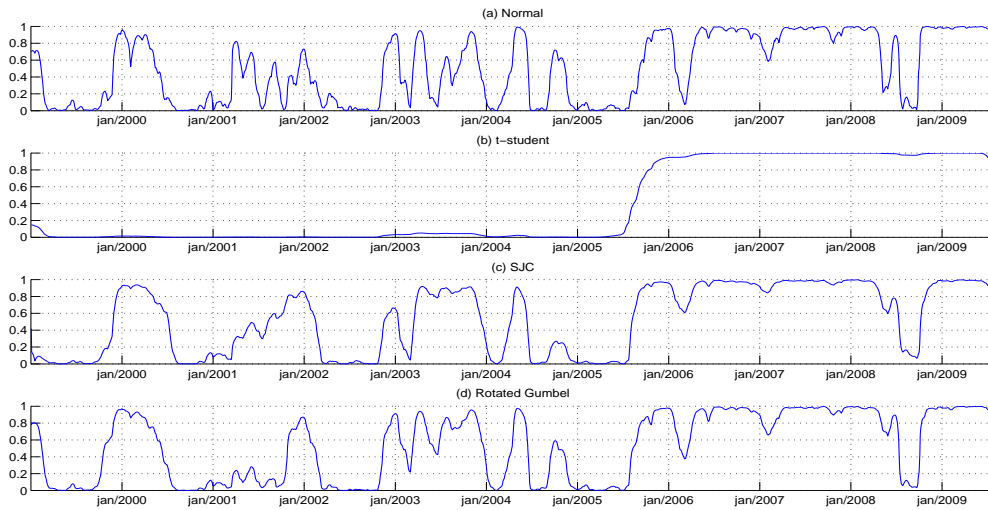


Figura 2: Probabilidades suavizadas para o regime de alta dependência (BOVESPA-FTSE100)

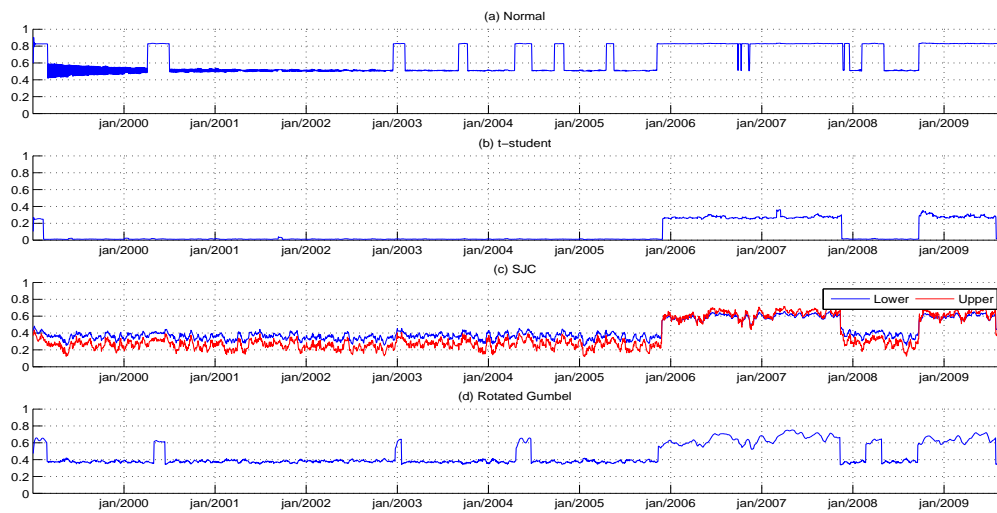


Figura 3: Dinâmica da dependência (BOVESPA-S&P500)

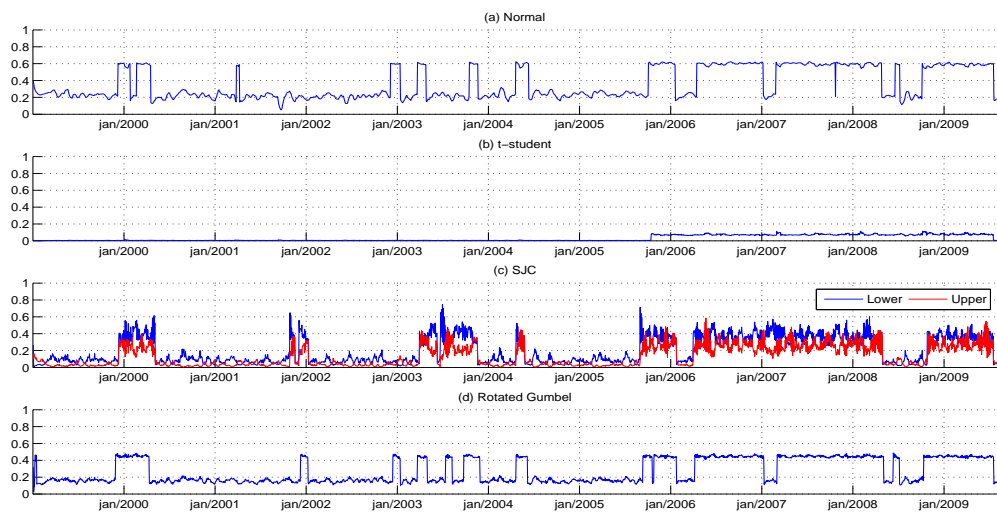


Figura 4: Dinâmica da dependência (BOVESPA-FTSE100)

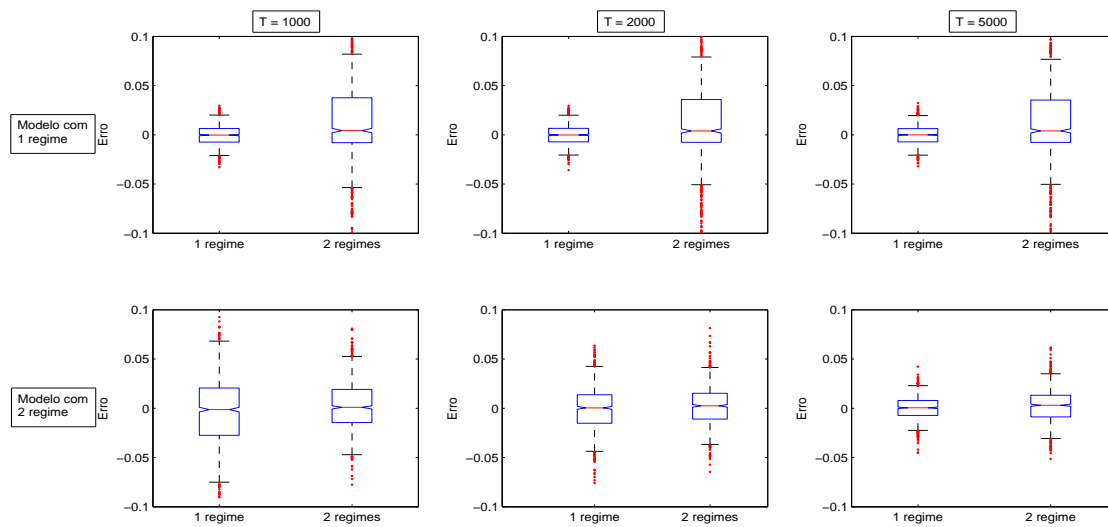


Figura 5: Box plot - erro na dependência (cópula Normal)

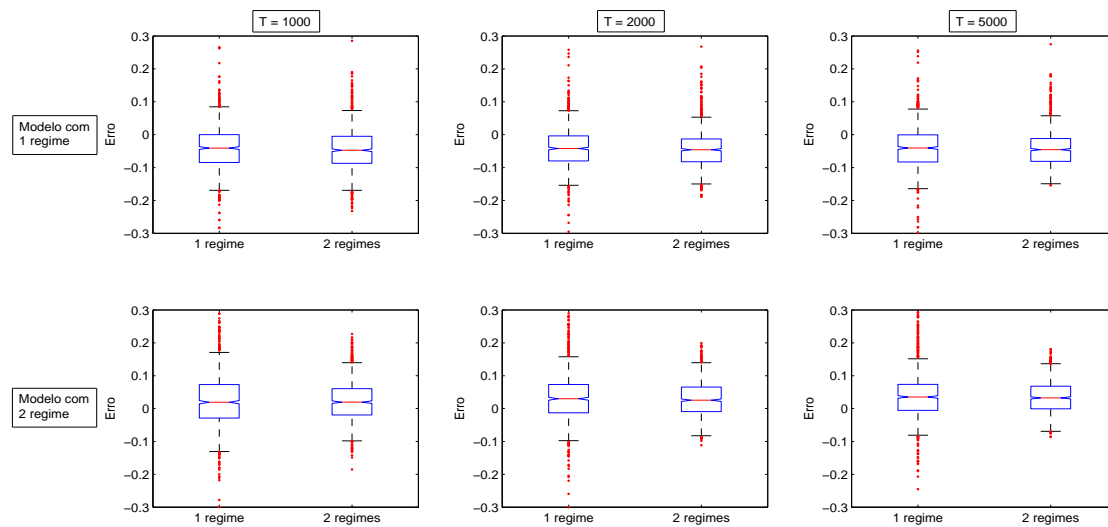


Figura 6: Box plot - erro na dependência caudal inferior (cópula SJC)

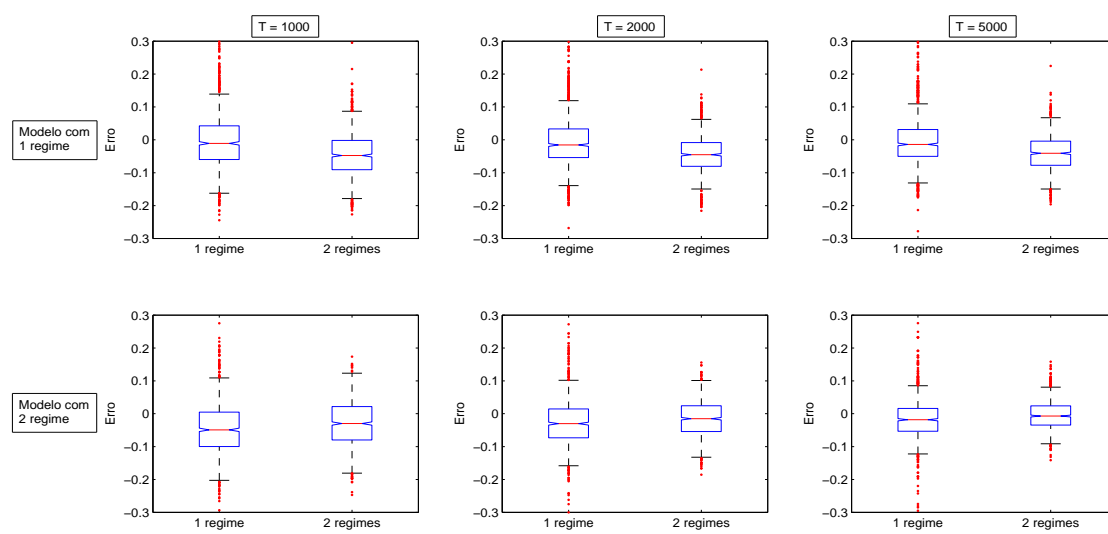


Figura 7: Box plot - erro dependência caudal superior (cópula SJC)