Uma análise de sensibilidade para o ajuste preventivo versus ajuste corretivo no controle on-line do número de não conformidades num item inspecionado

Lenilson Pereira da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística (PPGMAE)
lenilson.silva@cefetrn.br

Pledson Guedes de Medeiros
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística (PPGMAE)
Departamento de Estatística - UFRN
pledson@ccet.ufrn.br

Linda Lee Ho
Departamento de Engenharia de Produção (EP)
Universidade de São Paulo (USP)
lindalee@usp.br

RESUMO

Numa linha de produção, todo processo está sujeito a ocorrências de causas que venham a aparecer causando perdas na qualidade do produto e conseqüentemente prejuízos ao fabricante. O sistema de controle on-line consiste na inspeção periódica de um item a cada *m* produzidos e, uma vez que este item seja julgado como não conforme, admite-se que ocorreu uma mudança da fração de itens conformes e o processo é parado para ajuste. Este trabalho tem como objetivo fazer uma análise de sensibilidade do *Ajuste preventivo versus ajuste corretivo no controle on-line do número de não conformidades num item inspecionado***.**

Palavras Chave: Controle *on-line* de processo; número de não-conformidades do item inspecionado; cadeia de Markov.

1. Introdução

Taguchi *et al*. (1989) apresenta um sistema de controle *on-line* de processos por atributos onde considera um processo que inicia sua operação produzindo itens com uma fração conforme p_1 (estado I). Após a ocorrência de uma causa especial essa fração passa a um valor p_2, com $p_2 < p_1$, e o processo permanece produzindo nesta condição (estado II) até que esta mudança seja detectada e a causa especial removida. O sistema de controle consiste na inspeção periódica de um item a cada *m* produzidos e, uma vez que este item seja julgado como não conforme, admite-se que ocorreu uma mudança da fração de itens conformes e o processo é parado para ajuste. Após o ajuste, a fração de itens conformes retorna ao valor inicial. Rodrigues (2009) propõe um sistema de controle *on-line* baseado no número de não-conformidades do item inspecionado. Através das propriedades de uma cadeia de Markov ergódica, obtém uma expressão analítica para custo médio por item produzido num sistema de controle *on-line* que pode ser minimizada por dois parâmetros: o intervalo entre inspeções e o limite superior de controle para o número de não-conformidades no item inspecionado. Quinino & Ho (2010) desenvolveram um modelo probabilístico que considera a possibilidade de realizar ajustes preventivos, visando um aumento no número de itens conformes que compõem o processo de produção. Exemplos em que a utilização desta metodologia é bem sucedida incluem processo automático de solda, produção de semicondutores, produção de diodos utilizados em placas de circuitos impressos e em processos químicos. Este trabalho tem como objetivo principal fazer uma análise de sensibilidade do Ajuste preventivo versus ajuste corretivo no controle *on-line* de processo do número de não conformidades num item inspecionado, baseado em Silva (2010), que é uma extensão do modelo proposto por Quinino & Ho (2010) no controle *on-line* de qualidade por atributos. Ao contrário de Quinino & Ho (2010) que toma uma decisão em relação ao estado do processo através da classificação de um item como conforme ou não conforme, Silva (2010) considera o número de não-conformidades no item inspecionado, de forma que o número médio de defeitos na amostra é o parâmetro da distribuição de Poisson a ser empregada no cálculo dos riscos α e β do gráfico do número de não-conformidades na amostra. Este trabalho está estruturado do seguinte modo: A seção 2 apresenta o modelo probabilístico proposto. Na seção 3, o custo médio do sistema de controle, a análise de sensibilidade e as conclusões estão na seção 4.

2. Modelo Probabilístico

De acordo com Silva (2010), para modelar o processo de produção será utilizada uma cadeia de Markov de 9 estados discretos $\Omega = \{01, 02, 03, 11, 12, 13, 21, 22, 23\}$, onde os estados do processo são definidos pelos índices (s,k). Em relação ao primeiro índice, sendo $s = 0$, quando todos os itens do ciclo considerado, foram produzidos no Estado I; $s = 1$, necessariamente ocorreu uma mudança do Estado I para o Estado II no ciclo considerado e pelo menos o item inspecionado foi produzido no Estado II; $s = 2$, todos os itens do ciclo considerado, foram produzidos no Estado II. Com relação a k tem-se: $k = 1$, decide-se por realizar um ajuste preventivo e nenhum item é examinado; $k = 2$, decide-se por fazer a inspeção do *m-ésimo* item e o processo é declarado fora de controle; Se $k = 3$, decide-se por fazer a inspeção *do m-ésimo* item e o processo é declarado sob-controle.

Para obter as probabilidades de transição de compõem a matriz de transição, uma variável aleatória não observável, Θ_i com $i \in \{1,2,3,4,\cdots\}$ foi definida. A variável Θ_i representa o real estado no qual o *i-ésimo* item foi produzido. Logo, $\Theta_i = 0$, se o real estado do processo for I. Assim, a probabilidade de que o processo permaneça no estado I até o *m-ésimo* item produzido no ciclo é expressa por:

$$P\left(\Theta_m = 0\right) = P\left(\Theta_1 = 0, \Theta_2 = 0, \cdots, \Theta_m = 0\right) = (1-\pi)^m$$

Considerando L como limite superior de controle, conforme definido anteriormente, e α representando a probabilidade de julgar o processo fora de controle quando ele está sob controle e β a probabilidade de julgar o processo sob controle quando ele não está, tem-se:

$$\alpha = P(C > L \mid \lambda = \lambda_1) \text{ e } \beta = P(C \le L \mid \lambda = \lambda_2)$$

A Matriz de Transição P fornece as respectivas probabilidades de transição obtidas.

$$P = \begin{bmatrix}
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{(1,3);(2,1)} & p_{(1,3);(2,2)} & p_{(1,3);(2,3)} \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
p_{(0,1);(0,1)} & p_{(0,1);(0,2)} & p_{(0,1);(0,3)} & p_{(0,1);(1,1)} & p_{(0,1);(1,2)} & p_{(0,1);(1,3)} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{(1,3);(2,1)} & p_{(1,3);(2,2)} & p_{(1,3);(2,3)}
\end{bmatrix}$$

$p_{(s,k);(s^*,k^*)}$ é um elemento da matriz de transição **P** e denota a probabilidade de transição do estado (s,k) no tempo i para o estado (s*,k*) no momento $(i+1)$ (m itens são produzidos neste instante).

As expressões obtidas por Silva (2010) fornecem as seguintes probabilidades de transição:

$$P_{(0,1);(0,1)} = p(1-\pi)^m \qquad P_{(0,1);(1,1)} = p\left[1-(1-\pi)^m\right] \qquad P_{(1,3);(2,2)} = (1-p)(1-\beta)$$

$$P_{(0,1);(0,2)} = (1-p)(1-\pi)^m \alpha \qquad P_{(0,1);(1,2)} = (1-p)\left[1-(1-\pi)^m\right](1-\beta) \qquad P_{(1,3);(2,3)} = (1-p)\beta$$

$$P_{(0,1);(0,3)} = (1-p)(1-\pi)^m(1-\alpha) \qquad P_{(0,1);(1,3)} = (1-p)\left[1-(1-\pi)^m\right]\beta \qquad P_{(1,3);(2,1)} = p$$

A matriz **P** é uma matriz de uma cadeia regular (detalhes em Ross, 2003), então existe o $\lim_{j\to\infty} \mathrm{P}^{(j)} = \mathrm{Y}$, em que todas as linhas da matriz **Y** são igual ao vetor linha $y = [y_{(01)}, y_{(02)}, \cdots, y_{(23)}]$. O vetor **y** é um vetor de probabilidades $\left(\sum_i y_i = 1\right)$ no estado estacionário, com todos os valores y_i estritamente positivos. Como $\mathrm{P}^{(j+1)} = \mathrm{P}^j\mathrm{P}$ e $\lim_{j\to\infty} \mathrm{P}^{(j+1)} = \lim_{j\to\infty} \mathrm{P}^j = \mathrm{Y}$, então no limite a equação $\mathrm{Y} = \mathrm{YP}$ é verdadeira. Como todas as linhas de **Y** são iguais à **y**, a equação $y = yp$ também é válida no limite, e pode ser escrita como: $y = yP \Rightarrow y(P-I) = 0$, em que **I** é a matriz identidade. Portanto, o vetor y pode ser obtido a partir da resolução do sistema linear $y(P-I) = 0$ com a restrição de que $\sum_i y_i = 1$. A solução do sistema, segundo Silva (2010) é dada por:

$$y_{(01)} = \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(0,1)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(02)} = \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(0,2)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(03)} = \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(0,3)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)};$$

$$y_{(11)} = \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(1,1)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(12)} = \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(1,2)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(13)} \frac{\left(1-p_{(1,3);(2,3)}\right)p_{(0,1);(1,3)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)};$$

$$y_{(21)} = \frac{p_{(0,1);(1,3)}p_{(1,3);(2,1)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(22)} = \frac{p_{(0,1);(1,3)}p_{(1,3);(2,2)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}; \quad y_{(23)} = \frac{p_{(0,1);(1,3)}p_{(1,3);(2,3)}}{1-\left(p_{(1,3);(2,3)}-p_{(0,1);(1,3)}\right)}.$$

3. Custo Médio do Sistema de Controle

Os seguintes custos são considerados:
- c_i – custo para inspecionar um item produzido;
- c_{nc} – custo de enviar um item não conforme para o mercado ou próximas etapas do processo;
- c_a – custo de ajuste do processo;
- c_{snc} – custo de eliminar um item não conforme;
- c_{sc} – custo de eliminar um item conforme.

Sendo que cada estado (sk) pode ser escrito como $V_{(sk)} = \delta_{(sk)} + \gamma_{(sk)} + \eta_{(sk)} + \omega_{(sk)}$ em que:

- $\delta_{(sk)}$, custo para inspeção do processo;
- $\gamma_{(sk)}$, custo decorrente dos itens defeituosos (um item é defeituoso quando apresenta um número de não conformidades maior que o limite superior de especificação LE);
- $\eta_{(sk)}$, custo relacionado ao descarte do item inspecionado;
- $\omega_{(sk)}$, custo de ajuste do processo

As expressões obtidas para esses custos são:

Custo de não conformidade
- $\gamma_{(01)} = \gamma_{(02)} = \gamma_{(03)} = c_{nc}(m-1)(1-q_1)$
- $\gamma_{(11)} = \gamma_{(12)} = \gamma_{(13)} = c_{nc}\sum_{i=1}^{m}\frac{\pi(1-\pi)^{i-1}}{1-(1-\pi)^m}\left[(i-1)(1-q_1)+(m-i)(1-q_1)\right]$
- $\gamma_{(21)} = \gamma_{(22)} = \gamma_{(23)} = c_{nc}(m-1)(1-q_2)$, com $q_1 = P(C \le LE \mid \lambda = \lambda_1)$ e $q_2 = P(C \le LE \mid \lambda = \lambda_2)$

Custo de descarte do item inspecionado
- $\eta(01) = \eta(11) = \eta(21) = 0$
- $\eta_{(02)} = c_{sc}\frac{P(L < C < LE)}{\alpha} + c_{snc}\frac{P(C > \max(L, LE))}{\alpha}$
- $\eta_{(03)} = c_{sc}\frac{P(C < \min(L, LE))}{1-\alpha} + c_{snc}\frac{P(LE < C < L)}{1-\alpha}$
- $\eta_{(12)} = \eta_{(22)} = c_{sc}\frac{P(L < C < LE)}{1-\beta} + c_{snc}\frac{P(C > \max(L, LE))}{1-\beta}$
- $\eta_{(13)} = \eta_{(23)} = c_{s\_c}\frac{P(C < \min(L, LE))}{\beta} + c_{snc}\frac{P(LE < C < L)}{\beta}$

Custo de ajuste
- $\omega_{(03)} = \omega_{(13)} = \omega_{(23)} = 0$
- $\omega_{(01)} = \omega_{(11)} = \omega_{(21)} = \omega_{(02)} = \omega_{(12)} = \omega_{(22)} = c_a$

Quanto para inspeção do processo
- $\delta_{(01)} = \delta_{(11)} = \delta_{(21)} = 0$
- $\delta_{(02)} = \delta_{(03)} = \delta_{(12)} = \delta_{(13)} = \delta_{(22)} = \delta_{(23)} = c_i$

A expressão que fornece o custo médio por item produzido e não descartado é, segundo Silva (2010), dada por:

$$E(C) = \frac{1}{m-1}\left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{3} y_{ij}\left[\gamma(sk)+\eta(sk)+\omega(sk)+\delta(sk)\right]\right) \quad (1)$$

A determinação da política ótima de controle, consiste na determinação de m, p e L que minimizam (1). Ou seja, o problema consiste em determinar:

$$\begin{aligned}(m^0, L^0, p^0) &= \arg\min_{(m,p,L)} E(C) \\ \text{s.a. } \varphi &\ge \varphi_0\end{aligned} \quad (2)$$

Os valores ótimos para m, p e L devem ser obtidos computacionalmente por meio de uma busca direta através da minimização de (2), onde φ representa a fração conforme do processo. φ é definida como o quociente entre o número de itens que atendam as especificações e os $m-1$ itens produzidos e não descartados. Para obter a fração conforme considere a equação:

$$\varphi = 1 - [\varphi(01) + \varphi(02) + \varphi(03) + \varphi(11) + \varphi(12) + \varphi(13) + \varphi(21) + \varphi(22) + \varphi(23)]$$

Sendo $\varphi(sk)$ a fração não conforme do estado *sk*, com $s = 0,1,2$ e $k = 1,2,3$, com

- $\varphi(0k) = y_{(0k)}(1 - q_1)$;
- $\varphi(1k) = y_{(1k)} \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\pi(1-\pi)^{i-1}}{1-(1-\pi)^m}(i-1)(1-q_1) + (m-i)(1-q_2)$;
- $\varphi(2k) = y_{(2k)}(1 - q_2), \quad \text{com } k = 1, 2, 3.$

4. Análise de Sensibilidade

Faremos agora uma análise de sensibilidade do modelo proposto. Tanto aos custos envolvidos, como aos parâmetros do processo, atribuímos valores baseados em dados históricos. Essa análise será feita da seguinte maneira: Inicialmente, com ajuda do software R, obteremos os valores ótimos (m^0, p^0, L^0) que minimizam o custo médio do sistema por item produzido, sem exigir nenhum nível mínimo de conformidade do processo. Em seguida, obteremos o terno de valores ótimos (m^0, p^0, L^0), considerando um nível mínimo de conformidade, que para o nosso exemplo será particularizado em 93%.

TABELA 1 – Parâmetros de acordo com dados históricos

custos unitários	valores ($)	parâmetros do processo	valores
c_a	15	π	0,001
c_i	2,5	λ_1	3,5
c_n	5	λ_2	6,5
c_{dn}	1	LE	6
c_{dc}	2	-	-

Nesse caso particular, o cliente especificou ao fabricante que 6 é o número máximo de defeitos aceitáveis em uma peça, ou seja, LE = 6, conforme TABELA 1. O fabricante, cada vez mais preocupado com a redução de seus custos, quer inspecionar um item a cada *m* produzidas e tem interesse então em determinar o tamanho do intervalo de inspeção; o valor de *p* que define a estratégia de ajuste a ser utilizada; e o limite superior de controle tal que minimize o custo médio de produção por item produzido para detectar mudanças da frequência média de defeitos de $\lambda_1 = 3{,}5$ para $\lambda_1 = 6{,}5$. Para esse cenário os valores ótimos obtidos foram $m^0 = 77$, $p^0 = 0$ e $L^0 = 4$ com o custo 0,5632445, conforme TABELA 2.

TABELA 2 – Parâmetros ótimos e custo médio mínimo.

m ótimo - m^0	p ótimo - p^0	L ótimo - L^0	Custo médio mínimo - $C(\$)$
77	0	4	0,5632

Neste caso, a melhor política não é fazer um ajuste preventivo, pois com $p = 0$ sempre será feita a inspeção do *m-ésimo* item. Com isso, a cada 77 itens produzidos, um experimento de Bernoulli com probabilidade *p* é realizado. O evento de interesse é “fazer um ajuste preventivo”. Como o valor ótimo é $p = 0$, esse evento é impossível, ou seja, faremos a inspeção. Logo, decide-se por inspecionar o 77° item produzido e conta-se o número de não conformidades presentes nele. Caso o número dessas não conformidades seja maior que 4, o processo é interrompido para ajuste. Do contrário o processo segue adiante.

Por outro lado, o fabricante também está preocupado em agradar seus clientes, cada vez mais exigentes, oferecendo lotes de produtos com uma quantidade cada vez maior de artigos que atendam as especificações, mesmo que para isso tenha que encarecer sua produção. Para assegurar a qualidade do produto, o comprador, exige como contrato de garantia um nível mínimo de conformidade dos produtos para comprar o lote. No nosso exemplo, em particular, a fração conforme mínima exigida é de 93%. A política de ajuste do processo onde um contrato de garantia é previsto para assegurar um nível mínimo de conformidade φ_0 será aqui denotado por Caso com Restrição. Agora, a estratégia é obter o terno de valores ótimos (m^0, p^0, L^0) que minimizam o custo médio por item produzido satisfazendo a restrição $\varphi \geq \varphi_0$ sendo nesse caso em particular $\varphi_0 = 93\%$

A TABELA 3 apresenta os valores ótimos obtidos no caso em que um contrato de garantia com 93% de conformidade foi exigido por parte de um cliente para comprar um lote de certo produto.

TABELA 3 – Parâmetros ótimos e custo médio mínimo

m ótimo - m^0	p ótimo - p^0	L ótimo - L^0	Custo médio mínimo - $C(\$)$
15	0,04	4	0,9777

A impor a restrição ao projeto, exigindo um nível mínimo de conformidade superior ao antes obtido, foi preciso aumentar em 0,4145 o custo médio por item produzido. Nesse caso a cada 15 itens produzidos um experimento de Bernoulli com probabilidade *p=0,04* será realizado. Caso o sucesso ocorra o processo será ajustado sem que nenhum item seja inspecionado. Do contrário o item será inspecionado e se apresentar um número de não conformidades superior a 4 o processo será interrompido para ajuste.

4. Conclusões

Com a inserção de uma política de ajustes preventivos no processo, percebe-se que sempre que opta-se por fazer o ajuste preventivo (*p=1*), o limite superior de controle fica constante e igual a 1. Não consta na tabela 4, mas, quando o custo de ajuste é igual ao custo de inspeção também temos *p=1*. Quando o custo de ajuste é no máximo quatro vezes maior que o custo de inspeção, a melhor política é fazer o ajuste preventivo. Se restringirmos o nível de conformidade a 93%, uma probabilidade de mudança do Estado I para o estado II na ordem de 1% fará com que quase toda produção precise ser examinada. Em linhas gerais podemos dizer que, para o caso com restrição, quanto mais próximo o *p* de 1 maior será a possibilidade de fazer um ajuste preventivo. Para o exemplo em questão a exigência no nível mínimo de conformidade elevou o custo médio por item produzido de 0,5632 para 0,9777, sendo que a fração conforme aumentou de 91% para 93%.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro ao PPGMAE através do projeto Casadinho.

Referências Bibliográficas

Quinino, R.C., & Ho, L. L. (2010). Effects of the preventive and corrective adjustmensts in economical designs for on-line process control for attributes with misclassifications errors. *Engineering Optimization*, 42(1), 17-31.

Rodrigues, R. M., (2009). Controle on-line para o número de não-conformidades em um item inspecionado. *Dissertação de Mestrado. PPGMAE-UFRN, Natal.*

Silva, L. P., (2010). *Ajuste preventivo versus ajuste corretivo no controle on-line do número de não conformidades num item inspecionado. Dissertação de Mestrado. PPGMAE-UFRN, Natal*

Ross, S., M, (1997). *Introduction.to Probability Models*, Academic Press, San Diego.

Taguchi, G., Elsayed, E. A. & Hsiang, T. (1989). *Quality Engineering in Production in Systems*. McGraw-Hill, New York.