Uma proposta de previsão em modelos *tv*ARCH

Maria Sílvia de Assis Moura - DEs, UFSCar[1]
Leandro Teixeira Lopes de Souza - DEs, UFSCar

Resumo: *O modelo ARCH, Auto Regressive Conditional Heteroscedasticy foi proposto por Engle (1982). A estratégia usada foi modelar* σ_t^2 *como dependente dos quadrados dos retornos passados,* $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots$ *, e definiu* X_t *como um produto de* σ_t^2 *e uma pertubação aleatória, por,* $X_t = \sqrt{\sigma_t^2}\epsilon_t$ *e* $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j}^2$*,* $t \in Z$*, onde* $\{\epsilon_t\}$ *é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média zero e variância unitária,* $\alpha_0 > 0$*,* $\alpha_i \geq 0$*,* $i = 1, 2, \ldots, p$*. Uma extensão desse modelo, proposta por Dahlhaus et al. (2007) supõe que os parâmetros* α_j *variem no tempo, ou seja* $\alpha_j(t)$*. Também apresentam um método de estimação dos parâmetros desse modelo. Este modelo foi denominado de* $tvARCH(p)$*. A ideia é fazer previsões de forma recursiva. Para fazermos previsões k passos à frente de uma série* $tvARCH(p)$ *observada até um ponto t, propomos que obtenha-se previsões de* $\sigma_{t+k}^2 = \sigma_t^2(k)$ *e* $\hat{\alpha}_{i,t+k} = \hat{\alpha}_i(t+h)$ *de forma recursiva, começando pela previsão de* $\sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^2(1)$*, por* $\hat{\sigma}_t^2 = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)X_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p(t)X_{t-p}^2$*. Para previsões k passos à frente, usamos* $\hat{\sigma}_t^2(k) = \hat{\sigma}_t^2(k)\hat{\alpha}_0(t+k-1) + \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i(t+k-1)\sigma_t^2(k-i)$*, onde* $\hat{\alpha}_i(t+k-1)$ *são calculados usando o algoritmo de Dahlhaus et al. (2007).*

Palavras-chave: *Previsão,* $tvARCH$*, Simulação.*

1 Preliminares

O modelo ARCH (Auto Regressive Conditional Heteroscedaticity) foi proposto por Engle (1982). Apesar de ter sido desenvolvido para modelar e prever inflação, as propriedades do modelo foram consideradas úteis para análise de séries financeiras em geral. Muitas séries temporais exibem períodos de grande volatilidade seguidos de períodos de relativa tranquilidade. Nestes casos, a suposição de variância constante (homocedasticidade) pode não ser apropriada. A estratégia usada por Engle foi modelar σ_t^2 como dependente dos quadrados dos retornos passados, $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots$, e definiu X_t como um produto de σ_t^2 por

$$X_t = \sqrt{\sigma_t^2}\epsilon_t \tag{1}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j X_{t-j}^2, t \in Z \tag{2}$$

onde $\{\epsilon_t\}$ é uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d. com média zero e variância unitária, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, ..., p$. Este modelo será denotado por $ARCH(p)$. Em que uma extensão

[1] *msilvia@ufscar.br*

desses modelos proposta por Dahlhaus et al. (2007) supõe-se que os parâmetros α_j variem no tempo, ou seja, $\alpha_j(t)$. Os parâmetros $\alpha_j(t)$ para $t = 1, ..., N$, devem ser re-parametrizados. Assim

$$\begin{aligned} X_{t,N} &= \sigma_{t,N}\epsilon_t \\ \sigma^2_{t,N} &= \alpha_0\left(\frac{t}{N}\right) + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j\left(\frac{t}{N}\right)X^2_{t-j,N} t = 1, ..., N \end{aligned} \tag{3}$$

Chamamos a seqüência $\{X_{t,N} : t = 1, ..., N\}$ que satisfaz a equação 3, um processo ARCH com coeficientes variando no tempo de ordem p (tvARCH(p)).

Dahlhaus et al. (2006) mostraram que o processo tvARCH pode ser localmente aproximado por um processo ARCH estacionário. Além disso, eles estenderam várias propriedades do processo ARCH para um processo tvARCH.

2 Um algoritmo recursivo para estimação dos parâmetros do modelo tvARCH(p)

Dahlhaus et al. (2007) propuseram o seguinte estimador recursivo dos coeficientes $\alpha(t) = \alpha_t$ do modelo $tvAR(p)$,

$$\hat{\alpha}_{t,N} = \hat{\alpha}_{t-1,N} + \lambda\left\{X^2_{t,N} - \hat{\alpha}^T_{t-1,N}\chi_{t-1,N}\right\}\frac{\chi_{t-1,N}}{|\chi_{t-1,N}|^2_1} \tag{4}$$

onde

$$\chi^T_{t-1,N} = (1, X^2_{t-1,N}, ..., X^2_{t-p,N}), |\chi_{t-1,N}|_1 = 1 + \sum_{j=1}^{p} X^2_{t-j,N}$$

sendo a condição inicial dadas por $\hat{\alpha}_{p,N} = (0, ..., 0)_{p+1}$. O algoritmo é linear nos estimadores, apesar da não-linearidade do processo tvARCH.

Para diminuir o vício do estimador dado acima, Dahlhaus et al. (2007) propõe uma estimador obtido da combinação linear de dois estimadores do tipo 4, calculados segundo dois valores de λ, indicados por λ_1 e λ_2, com $\lambda_2 = w\lambda_1$ e $0 < w < 1$.

$$\breve{\alpha}_{t_0,N}(w) = \frac{1}{1-w}\hat{\alpha}_{t_0,N}(\lambda_1) - \frac{w}{1-w}\hat{\alpha}_{t_0,N}(\lambda_2) \tag{5}$$

As propriedade deste estimador são estudados em Dahlhaus et al. (2007) em um contexto não-estacionário e a normalidade assintótica e uma expressão para o vício devido à não estacionariedade estão estabelecidas.

Para usar 5, é necessário escolher os valores de λ_1 e w. A escolha desses valores depende do grau não-estacionariedade, de modo que λ_1 deve ser grande se as características do processo mudam rapidamente.

3 Estudo de Simulação

3.1 Introdução

Para avaliar o comportamento assintótico do estimador recursivo (proposto em 5) dos parâmetros do modelo tvARCH(p) descrito em 3, é necessário fazer estudos de simulação do modelo em diversas composições de número de parâmetros (p), tamanho N da série e valores de λ_1 e w.

3.2 Tamanho da Série

Quando estamos falando de uma teoria assintótica algumas perguntas são freqüentemente levantadas a respeito do tamanho da amostra (no nosso caso o tamanho da série) e sua influência. Entretanto, é muito comum que, na prática estejam disponíveis apenas amostras relativamente pequenas para a análise. Dessa forma, é natural que apareça um interesse em saber como o estimador se comporta em tal situação, analisar o comportamento dos estimadores para amostras pequenas e grandes e se possível determinar ou indicar um tamanho mínimo para o uso do estimador.

3.3 Estudo por simulação do efeito do tamanho N da série

Apresentamos a implementação dos estimadores dados em 5 um modelo $tvARCH(1)$ com tamanho $N = 1000$ e $N = 5000$ respectivamente.

O modelo gerado é dado por 3 e os coeficientes são:

$$\alpha_0(t) = 0.9 \quad \forall t \qquad \alpha_1(t) = \begin{cases} 0.1, & \text{se } t \leq N/2 \\ 0.8, & \text{se } t > N/2. \end{cases}$$

A partir das duas realizações foi feita a estimação dos coeficientes usando a proposta dado em 5, e tendo sido escolhido $\lambda_1 = 0.01$ e $\lambda_2 = 0.001$ ($w = 0.1$) estão apresentadas na Figura 1.

A Figura 1 apresenta as estimativas de $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1$ em preto e os verdadeiros valores de $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1$ em vermelho. Observamos que as estimativas gastam muitas observações para se aproximar dos verdadeiros valores de $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1$.

A Figura 2 mostra a estimativa dos coeficientes α_j, $j = 0, 1$, obtidas segundo 5 com $\lambda_1 = 0.01$ e $\lambda_2 = 0.001$, ($w = 0.1$).

Observamos na Figura 2 que o estimador sempre precisa de, por volta de 500 iterações para "esquentar".

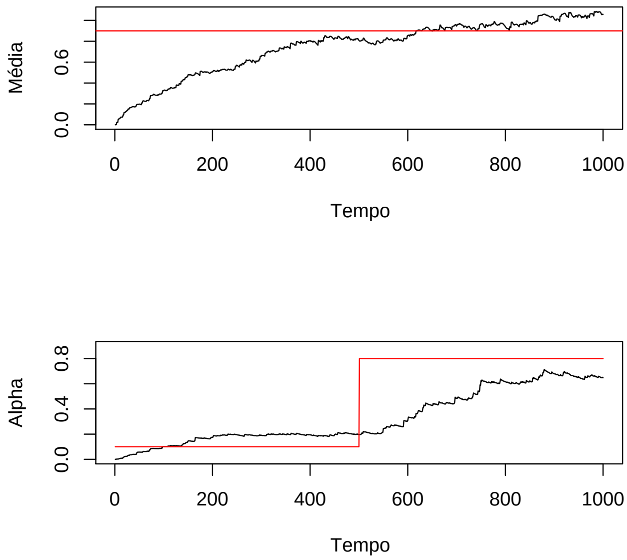

Figura 1: *Estimativas dos coeficientes* $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1$, *do modelo tvARCH*(1) *obtidas recursivamente por 5 a partir de uma série de tamanho* $N = 1000$.

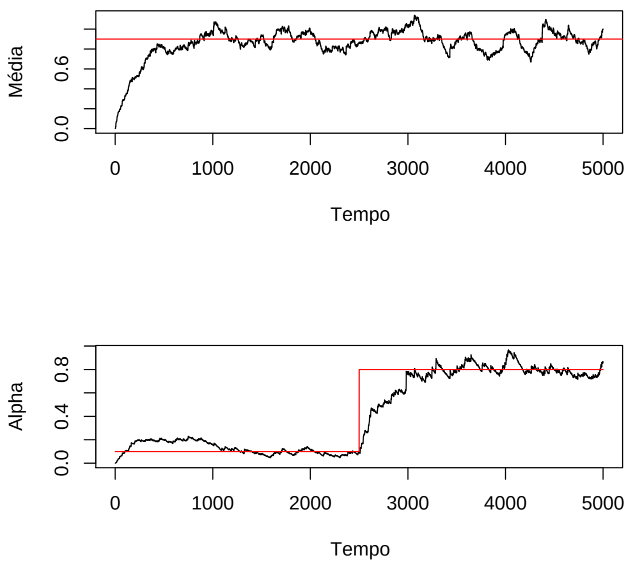

Figura 2: *Estimativas dos coeficientes* $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1$, *do modelo tvARCH(1) usando* $\lambda_1 = 0.01$ *e* $\lambda_2 = 0.001$ *a partir de uma série de tamanho* $N = 5000$.

4 Método de previsão para o modelo $tvARCH(p)$

A análise de uma série temporal real compreende vários itens. A princípio, há a necessidade de descobrir a estrutura da série, e uma vez escolhido por algum critério um modelo para a série, o objetivo pode ser o de fazer previsões de valores futuros da série.

Nesta seção o foco é propor uma maneira de predizer valores futuros de uma série gerada segundo um modelo $tvARCH(p)$.

Para séries $ARCH(p)$ dadas por 1 e 2 a previsão do valor futuro um passo à frente e k passos à frente são obtidas a partir das expressões 6 e 7 respectivamente.

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \alpha_2 X_{t-1}^2 + ... + \alpha_p X_{t-p+1}^2 \tag{6}$$

onde t é a origem fixada. As previsões k passos à frente, com origem em t, são dadas por

$$\hat{\sigma}_t^2(k) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \hat{\sigma}_t^2(k-i), \tag{7}$$

em que $\hat{\sigma}_t^2(k-i) = X_{t+k-i}^2$, se $k - i \leq 0$. [Morettin et al. (2006)]

Para fazer previsões k passos à frente de uma série $tvARCH(p)$ observada até um ponto t, inspirado na construção de previsões para $ARCH(p)$ propomos que obtenha-se previsões de $\sigma_{t+k}^2 = \sigma^2(t+k)$ e $\hat{\alpha}_{i,t+k} = \hat{\alpha}_i(t+k)$ de forma recursiva, começando pela previsão de $\sigma_{t+1}^2 = \sigma_t^2(1)$, dado por

$$\hat{\sigma}_t^2(1) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) X_t^2 + \alpha_2(t) X_{t-1}^2 + ... + \alpha_p(t) X_{t-p}^2 \tag{8}$$

A seguir, faz-se a previsão de X_{t+1} usando $\hat{X}_{t+1} = \hat{\sigma^2}_{t+1}$ para usar a previsão de $\alpha_i(t)$.

Estima-se a seguir cada função $\alpha_i(t)$ em $(t+1)$, calculando $\hat{\alpha}_i(t+1)$ através da expressão 4 para dois pares de λ, e usando a seguir 5.

Para a estimação de $\alpha_i(t+2)$ com $i = 1, ..., p$, procede-se de forma semelhante. Inicialmente faz-se a previsão de $\sigma^2(t+2) = \sigma^2(2)$ usando 9.

$$\hat{\sigma}_t^2(2) = \hat{\alpha}_0(t+1) + \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i(t+1) \hat{\sigma}_t^2(k-i), \tag{9}$$

onde $\hat{\sigma}_t^2(k-i) = X_{t+k-i}^2$, se $k - i \leq 0$. E em seguida faz-se a previsão $\hat{X}_{t+2} = \sigma_{t+2}^2$. Esta previsão é usada na expressão 4.

De forma geral a previsão k passos à frente é dado por duas equações recursivas. Assim,

$$\hat{\sigma}_t^2(k) = \hat{\alpha}_0(t+k-1) + \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i(t+k-1) \hat{\sigma}_t^2(k-i), \tag{10}$$

onde $\hat{\alpha}_0(t+k-1)$ são calculados por

$$\breve{\alpha}_{t+k-1,N}(w) = \frac{1}{1-w} \hat{\alpha}_{t+k-1,N}(\lambda_1) - \frac{w}{1-w} \hat{\alpha}_{t+k-1,N}(\lambda_2) \tag{11}$$

5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Observamos que o algoritmo demora, em torno de 400 observações para incorporar a variação coeficente, estamos trabalhando agora em verificar o comportamento do das previsões aqui propostas.

Referências

[1] Dahlhaus, R., Rao, S.S., 2006. *Statistical inference for time-varying ARCH processes.* Ann. Statist, 34, 1075-1114.

[2] Dahlhaus, R., Rao, S.S., 2007. *A recursive online algorithm for the estimation of time-varying ARCH parameters.* Bernoulli, 13, 389-422.

[3] Engle, R.F., 1982. *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation.* Econometrica 50, 987-1007.

[4] Morettin, P.A., Toloi, C.M.C., 2006. *Análise de Séries Temporais.* 2 ed. São Paulo: Editora Blucher, vol. 1, p. 535.