Uma abordagem geométrica
da teoria de inversas generalizadas de matrizes

Paulo Henrique Sales GUIMARÃES[1]
Lucas Monteiro CHAVES[2]
Devanil Jaques de SOUZA[3]

- RESUMO: Uma abordagem geométrica em termos de subespaços vetoriais e projetores lineares é utilizada para abordar a teoria das inversas generalizadas de Moore-Penrose. Suas principais propriedades são obtidas por este método. Uma generalização desta interpretação geométrica é aplicada para as inversas reflexivas em geral.
- PALAVRAS-CHAVE: inversas generalizadas, inversa de Moore-Penrose, inversas reflexivas.

Introdução

A teoria das inversas generalizadas de matrizes desempenha um papel fundamental em estatística, uma vez que nos mais variados métodos de estimação têm-se sistemas lineares inconsistentes, e, para se obterem as estimativas, alguma inversa generalizada é utilizada. Tal situação é de tal forma comum que os estatísticos se tornaram os grandes especialistas na teoria dessas matrizes. De fato, apesar da natureza essencialmente simples da teoria das inversas generalizadas, os livros de álgebra linear usados nos cursos de graduação (BOLDRINI, 1984), (ANTON, 2001) e pós-graduação (HOFFMANN, 1971) não fazem referência ao assunto. Resta ao estudante se reportar aos livros em língua inglesa escritos por grandes estatísticos (GRAYBILL, 1961), (GRAYBILL, 1976), (SEARLE, 1982), (SCHOTT, 2005). Esses livros são clássicos e contêm toda a teoria muito bem desenvolvida. Em português temos os textos (IEMMA, 1987), (MORAIS *et al*, 2001). No entanto, cabe aqui uma observação: apesar de escritos por estatísticos, e, portanto, preocupados essencialmente com a aplicação da teoria a problemas concretos, todos eles possuem uma abordagem extremamente algébrica, isto é, utilizam uma matemática abstrata. È claro que muitos exemplos de obtenção de estimadores via

[1] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: phsg13@yahoo.com.br
[2] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de lavras, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: lucas@dex.ufla.br
[3] Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras, Caixa Postal 3037, CEP: 37200-000, Lavras, MG, Brasil, E-mail: djs@oi.com.br
Agradecimento: Agradeço ao auxílio da **FAPEMIG** na elaboração do trabalho

inversas generalizadas serem apresentados, a natureza algébrica da abordagem dificulta a compreensão das propriedades essenciais desses estimadores. Nesse sentido, uma abordagem geométrica da teoria pode ser uma ferramenta que facilite a explicitação de tais propriedades. Uma abordagem geométrica das inversas de Moore-Penrose é desenvolvida em um pequeno capitulo do excelente livro (LIMA, 2006), onde é denominada de pseudo-inversa. Neste artigo uma generalização dessa construção é desenvolvida para as inversas generalizadas reflexivas e para as inversas de quadrados mínimos, em particular. Os autores não encontraram referencias para tais resultados. Além disso, várias propriedades das inversas generalizadas, algumas delas demonstradas nos livros citados, outras apenas colocadas como exercícios, são demonstradas utilizando-se apenas os argumentos geométricos aqui desenvolvidos.

1 Inversas Generalizadas

Rao & Mitra (1971) definiram inversa generalizada de uma matriz qualquer, com propriedades similares àquelas das inversas de matrizes não singulares, como:

Definição Seja A uma matriz de dimensão $m \times n$, de posto qualquer não nulo. Uma inversa generalizada de A, com notação A^-, é uma matriz $n \times m$ tal que $x = A^- y$ é uma solução do sistema $Ax = y$, para qualquer y que torne o sistema consistente.

Uma caracterização algébrica é que, A^- é uma inversa generalizada de A se, e somente se, $AA^- A = A$. Uma classe de inversas um pouco mais restritiva é a das chamadas inversas generalizadas reflexivas que, além da condição acima, exige ainda que $A^- AA^- = A^-$. A conveniência de se trabalhar com as inversas reflexivas é que, essa segunda condição garante que o posto das inversas reflexivas é o mesmo que o posto da matriz original (Rao e Mitra, 1971, p. 28).

Uma matriz A admite uma infinidade de inversas generalizadas reflexivas. Caso sejam impostas mais duas restrições algébricas, a saber, $(AA^-)^t = AA^-$ e $(A^- A)^t = A^- A$, em que A^t é a transposta de A. Essa inversa existe, é única e é denominada inversa generalizada de Moore-Penrose, com notação usual A^+. A importância desta inversa é evidenciada pelo teorema seguinte: dado um sistema inconsistente $Ax = y$ e uma solução aproximada x_a deste sistema, define-se o erro desta solução como o vetor $e(x_a) = y - A x_a$. Um vetor x_+ é definido como melhor solução aproximada, ou solução de norma mínima, se atender duas condições:

i) $\| e(x_+) \|^2 \leq \| e(x_a) \|^2$, em que x_a é qualquer outra solução aproximada.

ii) Se $\| e(x_+) \|^2 = \| e(x_a) \|^2$ então $\| x_+ \|^2 \leq \| x_a \|^2$.

Teorema 1 A melhor solução aproximada do sistema inconsistente $Ax = y$ é dada por $x_+ = A^+ y$, em que A^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose da matriz A.

A demonstração deste teorema é razoavelmente complicada pois é necessário obter as duas desigualdades i) e ii) a partir das quatro propriedades algébricas que definem a inversa de Moore-Penrose.

Uma classe particular de inversas reflexivas é a das inversas generalizadas de quadrados mínimos. Uma inversa generalizada A^- de A é chamada de inversa de quadrados mínimos se $(AA^-)^t = AA^-$.

3 Geometria das inversas generalizadas

Será apresentada uma construção geométrica da inversa de Moore-Penrose, que servirá de base para a interpretação geométrica das inversas generalizadas reflexivas. O que o trabalho apresenta de novo é, principalmente, a geometria das inversas generalizadas de quadrados mínimos e das inversas reflexivas, além do apelo geométrico para projetores e estimadores de mínimos quadrados. A notação usada será a usual nos textos de graduação em álgebra linear.

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensões n e m, respectivamente, e $A: V \to W$ uma transformação linear. Fixadas bases em V e W a transformação linear A pode ser representada por uma matriz e os espaços vetoriais V e W se tornam canonicamente isomorfos a $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Portanto não serão feitas distinções entre a transformação linear e sua representação como matriz. A imagem de A é definida por:

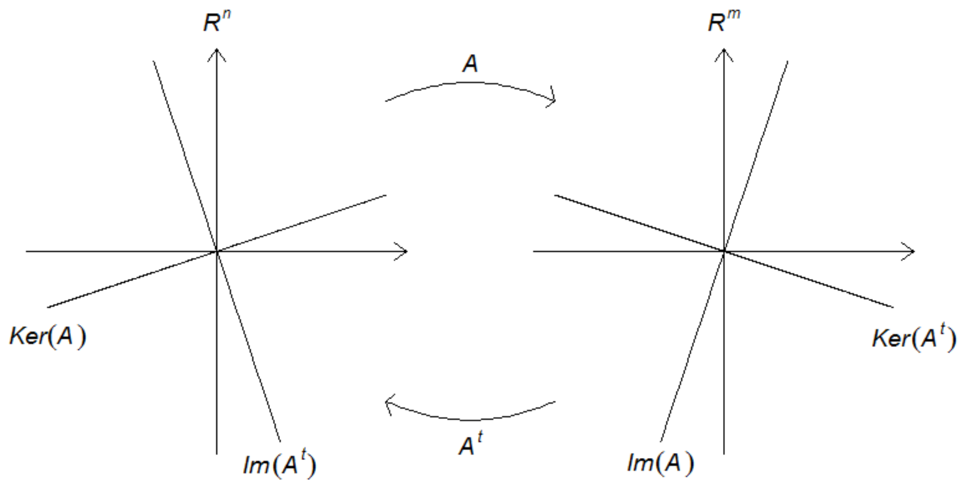
$$Im(A) = \left\{ w \in \mathbb{R}^m;\ A(v) = w \text{ para algum } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

O núcleo, ou Kernel, de A, é definido,

$$Ker(A) = \{ v \in \mathbb{R}^n;\ A(v) = 0 \}.$$

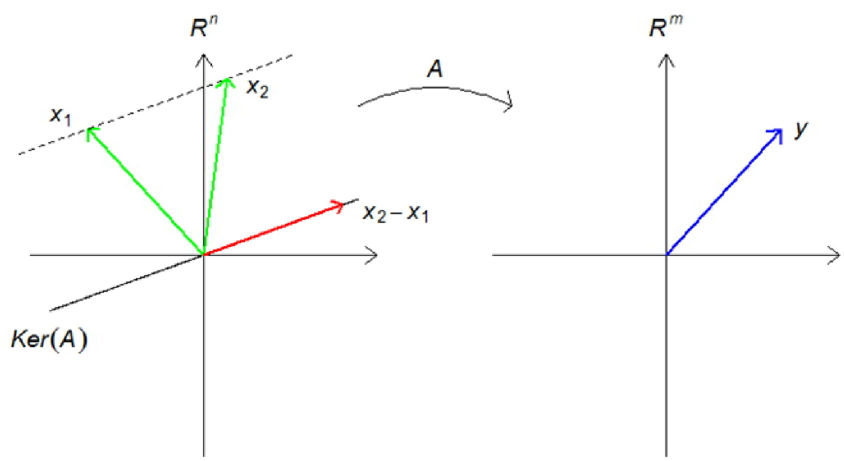
O fato fundamental relativo a estes dois subespaços vetoriais é o Teorema do núcleo e da imagem que garante que $dim(Im(A)) + dim(Ker(A)) = n.$ (Lima, 2006, pág. 68). A transposta de A é uma transformação linear $A^t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que, para $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ quaisquer, tem-se $\left\langle Ax, y \right\rangle = \left\langle x, A^t y \right\rangle$. Se $x \in Ker(A)$ então, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, $\left\langle Ax, y \right\rangle = \left\langle 0, y \right\rangle = \left\langle x, A^t y \right\rangle = 0$ e, consequentemente, $Ker(A)$ é perpendicular à $Im(A^t)$. Da mesma forma segue que $Ker(A^t)$ é perpendicular à $Im(A)$. Portanto, temos, na Figura 1, a configuração geométrica essencial à construção das inversas generalizadas.

Figura 1 Representação gráfica no núcleo e da imagem de A e A^t



Outra observação importante, que tem interpretação geométrica interessante, é que se x_1 e x_2 são tais que $Ax_1 = y$ e $Ax_2 = y$, então $Ax_2 - Ax_1 = 0$, que implica em $A(x_2 - x_1) = 0$, e, portanto $x_2 - x_1 \in Ker(A)$. Isso pode ser visualizado na Figura 2.

FIGURA 2 Geometria de $Ax_1=y$ e $Ax_2=y$.



Uma matriz quadrada tal que $A^2 = A$ é chamada matriz de projeção ou projetor. Tem-se que um projetor A restrito à $Im(A)$ é a identidade, ou seja, $A\left(Ax\right) = A^2x = Ax$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $I - A$ também é um projetor, pois $(I - A)^2 = I - 2A + A^2 = I - A$. Como

$$A((I - A)x) = A(x - Ax) = Ax - A^2x = Ax - Ax = 0 \Rightarrow Im(I - A) \subset Ker(A)$$

$$x \in Ker(A) \Rightarrow (I - A)x = x - Ax = x - 0 \Rightarrow x \in Im(I - A), \text{ segue então que}$$
$$Im(I - A) = Ker(A) \text{ e } Im(A) = Ker(I - A).$$

Uma matriz de projeção A é dita um projetor ortogonal se $Av - v$ é perpendicular ao subespaço $Im(A)$.

Proposição 1 Uma matriz de projeção é simétrica se e somente se é um projetor ortogonal.

$$\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle Av - v, Aw\rangle = 0$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Se A é simétrica

$$\langle v - Av, Aw\rangle = \langle v, Aw\rangle - \langle Av, Aw\rangle = \langle v, Aw\rangle - \langle v, A^2w\rangle$$

$$= \langle v, Aw\rangle - \langle v, Aw\rangle = 0 \ \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

$(\Leftarrow)$ Se A é um projetor ortogonal, $Av - v$ é perpendicular a Aw, isto é,

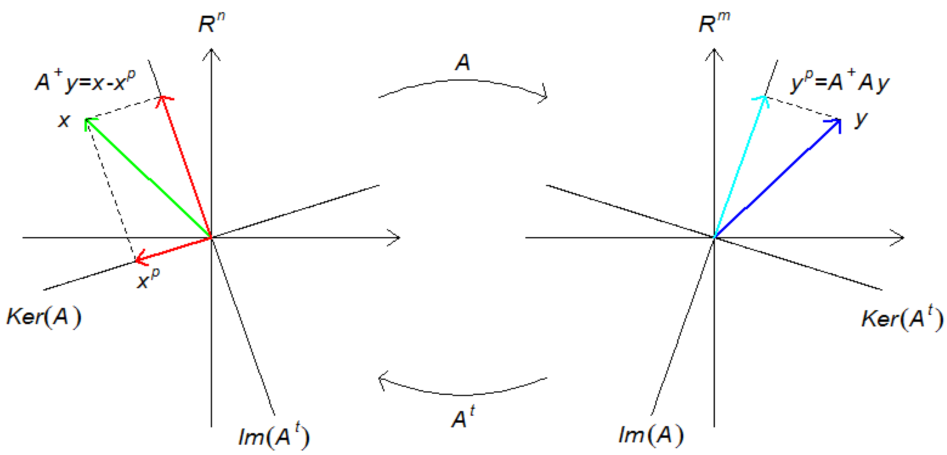
$\langle Av - v, Aw\rangle = 0 \Rightarrow \langle Av, Aw\rangle = \langle v, Aw\rangle$, da mesma forma $Aw - w$ é perpendicular a Av, isto é, $\langle Aw - w, Av\rangle = 0 \Rightarrow \langle Aw, Av\rangle = \langle w, Av\rangle$, portanto $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$. □

3.1Construção geométrica da inversa de Moore-Penrose.

A inversa de Moore-Penrose pode ser definida geometricamente da forma: dado $y \in \mathbb{R}^m$ não pertencente à imagem de A, o sistema linear $Ax = y$ não tem solução. A idéia é procurar, em $\mathbb{R}^n$, os vetores x tais que Ax esteja o mais próximo possível de y e, dentre esses vetores, aquele que possua a menor norma. O vetor na $Im(A)$ mais próximo de y é a projeção ortogonal de y sobre $Im(A)$ e denotado y^p. Se y pertence a $Im(A)$, y^p será o próprio y. Portanto, $y^p \in Im(A)$ e $y - y^p \in Ker(A^t)$, pois é perpendicular a todos os vetores em $Im(A)$. Uma vez que $y^p \in Im(A)$ existe um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = y^p$. De fato, existe uma infinidade de vetores, todos da forma $x + z$, com $A(x + z) = y^p$ e $z \in Ker(A)$. Dentre esses vetores $x + z$, o de menor norma é $x - x^p$ em que x^p é a projeção ortogonal de x sobre o $Ker(A)$. O vetor $x - x^p$ é perpendicular ao $Ker(A)$ e, portanto, $x - x^p \in Im(A^t)$. Pode-se agora definir a inversa de Moore-Penrose $A^+ : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ da forma $A^+ y = x - x^p$. Apesar de ser intuitivo que A^+ é uma transformação linear, tal fato tem que ser provado e a demonstração podem ser vista em Lima (2006), pág. 204. O fato fundamental nessa construção é a obtenção de um subespaço do $\mathbb{R}^n$, neste caso $Im(A^t)$, em que a restrição de A é um isomorfismo, e a inversa de Moore-Penrose é, essencialmente, a inversa dessa transformação restrita.

O vetor $A^+ y \in \mathrm{Im}(A^t)$ é, portanto, ortogonal ao $Ker(A)$, e é o único vetor da $Im(A^t)$ tal que $AA^+ y = y^p$. Note que A, restrita à $Im(A^t)$, é injetiva, uma vez que $Im(A^t) \cap Ker(A) = \{0\}$. Toda essa construção está descrita geometricamente na Figura 3.

Figura 3 Configuração geométrica da inversa generalizada de Moore-Penrose.



Proposição 2 A transformação linear $A^+ : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, definida geometricamente, é a inversa de Moore-Penrose.

Prova: Basta provar as quatro identidades que definem a inversa de Moore-Penrose.

$i)$ $AA^+ A = A$

Como $Ax = y \in Im(A) \Rightarrow y = y^p$ e, portanto $AA^+ Ax = AA^+ y = A(x - x^p)$

$= Ax - Ax^p = Ax,$ visto que $x^p \in Ker(A)$.

ii) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$

$$A^{+}AA^{+}y = A^{+}A(A^{+}y) = A^{+}A(x - x^{p}) = A^{+}(Ax - Ax^{p}) = A^{+}(Ax) = A^{+}y.$$

iii) $(A^{+}A)^{t} = A^{+}A$

Em termos de transformações lineares, tal fato é equivalente a mostrar que, para todo $x \in \mathbb{R}^{n}$ e todo $z \in \mathbb{R}^{n}$, $\left\langle A^{+}Ax, z\right\rangle = \left\langle x, A^{+}Az\right\rangle$.

$$\left\langle A^{+}Ax, z\right\rangle = \left\langle A^{+}(Ax), z\right\rangle = \left\langle x - x^{p}, z\right\rangle = \left\langle x - x^{p}, z^{p} + z_{1}\right\rangle = \left\langle x - x^{p}, z_{1}\right\rangle, \text{ em que}$$

$$z^{p} \in Ker(A) \text{ e } z_{1} \in Im(A^{t}).$$

$$\left\langle x, A^{+}Az\right\rangle = \left\langle x, z - z^{p}\right\rangle = \left\langle x, z_{1}\right\rangle = \left\langle x - x^{p} + x^{p}, z_{1}\right\rangle = \left\langle x - x^{p}, z_{1}\right\rangle, \text{ pois}$$

$$z - z^{p} \in Im(A^{t}) \text{ e } x^{p} \perp z_{1}.$$

iv) $(AA^{+})^{t} = AA^{+}$

A demonstração segue como no caso anterior. □

Da construção geométrica seguem algumas propriedades fundamentais das inversas de Moore-Penrose. A primeira delas é que o Teorema 1 decorre trivialmente da construção da inversa.

Como $A^{+}AA^{+}A = A^{+}A$ segue que $A^{+}A$ é uma matriz de projeção e, como é simétrica, pela proposição 1, $AA^{+}: \mathbb{R}^{m} \to \mathbb{R}^{m}$ é projetor ortogonal sobre $Im(A)$ e $A^{+}A: \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ é projetor ortogonal sobre $Im(A^{t})$.

Proposição 3 Um operador linear $P: \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ é um projetor ortogonal se, e somente se, $P = P^{+}$.

Prova: $(\Rightarrow)$ Se P é um projetor, isto é, $P^{2} = P$ tem-se que $PPP = P$. Então as quatro condições na definição da inversa de Moore–Penrose são satisfeitas, ou seja, $P = P^{+}$.

$(\Leftarrow)$ Se $P = P^{+}$ então $P^{+}y = Py$ e $P^{+}y^{p} = Py^{p}$. Como $P^{+}y^{p} = P^{+}y$ tem-se $Py^{p} = Py \Rightarrow y - y^{p} \in Ker\left(P\right)$, mas por construção, $y - y^{p} \in Ker\left(P^{t}\right)$. Segue deste fato que $Ker\left(P\right) = Ker\left(P^{t}\right)$. Da mesma forma tem-se que $Im(P) = Im(P^{t})$ e, portanto P é uma matriz simétrica. $PPy = PP^{+}y = PP^{+}y^{p} = P(x - x^{p})$ em que x é um vetor que é levado por P em y^p. Pode-se tomar então $x = y$ de onde segue que $PPy = PP^+ y = PP^+ y^p$ $= P(x - x^p) = P(y - x^p) = Py$ e, portanto, $P^2 = P$. Como P é simétrico, pela Proposição 1, é um projetor ortogonal. □

Proposição 4: $\left(A^+\right)^t = \left(A^t\right)^+$

Prova: *A*, restrita a $Im\left(A^t\right)$ é um isomorfismo sobre $Im\left(A\right)$. A inversa de Moore-Penrose é, essencialmente, a inversa desse isomorfismo. Ou seja, $A^+ = \left(A_{|Im\left(A^t\right)}\right)^{-1}$. Então

$$\left(A_{|Im\left(A^t\right)}\right)\left({A^+}_{|Im\left(A\right)}\right) = I \quad \rightarrow \quad \left({A^+}_{|Im\left(A\right)}\right)^t \left(A_{|Im\left(A^t\right)}\right)^t = I .$$

Portanto, $\left(A^+\right)^t = \left(A^t\right)^+$. □

Uma aplicação importante da inversa de Moore-Penrose é a obtenção das soluções das equações normais $\left(X^t X\right)\beta = X^t y$.

Proposição 5 A solução das equações normais, dada por $\hat{\beta} = \left(X^t X\right)^+ X^t y$, é igual a $X^+ y$.

Prova: Denominando $X^t X = B$ e observando que $Im\left(B\right) = Im\left(X^t\right)$ e $Ker\left(B\right) = Ker\left(X\right)$, $B^+ X^t y$ é um vetor $z - z^p$ tal que $B z = X^t y$ e z^p é a projeção de *z* em $Ker\left(B\right) = Ker\left(X\right)$ paralelamente ao subespaço $Im\left(B^t\right) = Im\left(B\right) = Im\left(X^t\right)$. Portanto, $\left(X^t X\right)\left(z - z^p\right) = X^t\left(X z\right) - X^t\left(X z^p\right) = X^t\left(X z\right) = X^t y$. Por outro lado, $X^+ y$ é um vetor tal que $X\left(x - x^p\right) = y^p \in Im\left(X\right)$. Logo $X^t X\left(x - x^p\right) = X^t y^p = X^t y$. Como $X^t X$, restrita a $Im\left(X^t\right)$, é injetiva, segue que $z - z^p = x - x^p$, isto é, $\left(X^t X\right)^+ X^t y = X^+ y$.

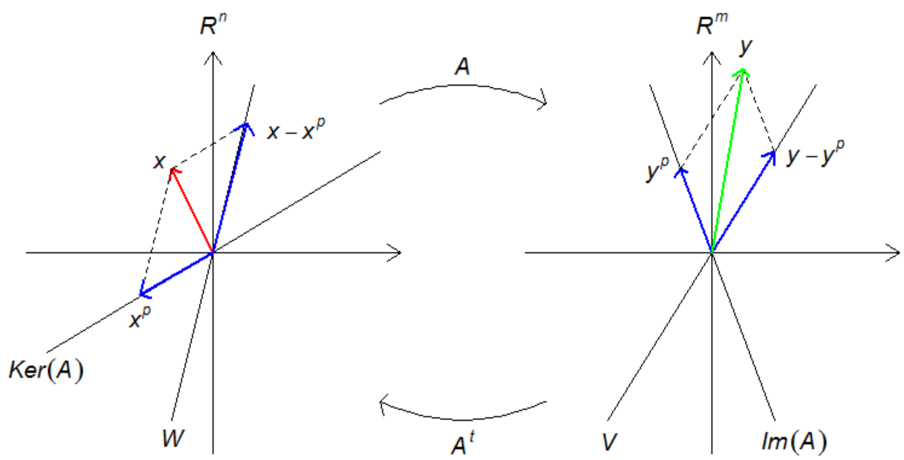
3.2 Construção geométrica das inversas reflexivas

A construção geométrica da inversa generalizada de Moore-Penrose permite, com poucas modificações, uma interpretação geométrica para inversas generalizadas que possuam o mesmo posto da matriz inicial, isto é, as inversas generalizadas reflexivas.

A idéia é: no lugar de se tomar o subespaço $Ker(A^t)$ toma-se qualquer subespaço *V* com $dim(V) = dim(Ker(A^t))$ tal que $\mathbb{R}^m = Im(A) \oplus V$ (soma direta). No lugar de $Im(A^t)$

toma-se um subespaço qualquer W tal que $\mathbb{R}^n = Ker(A) \oplus W$. A inversa generalizada de A, com notação A^-, aplicada em um vetor y, é definida da forma: projeta-se y em $Im(A)$ paralelamente ao subespaço V, obtendo-se o vetor y^p. Toma-se um vetor x tal que $Ax = y^p$. Projeta-se o vetor x em W paralelamente ao subespaço $Ker(A)$, obtendo-se o vetor $x - x^p$, isto é, $A^- y = A^- y^p = x - x^p$.

Figura 4 Configuração geométrica da inversa reflexiva.



De fato, A^-, assim definida, é uma inversa reflexiva, pois

$$AA^-A(x) = AA^-(y) = A(x - x^p) = Ax - Ax^p = Ax$$
$$A^-AA^-(y) = A^-A(x - x^p) = A^-(y^p) = A^-(y)$$

Portanto $AA^-A = A$ e $A^-AA^- = A^-$ e segue que A^- é uma inversa generalizada reflexiva.

Com essa interpretação geométrica é possível uma nova demonstração para o próximo teorema.

Teorema 3 (Graybill, 1976, pág. 31)**.** Seja A uma matriz qualquer, então $AB = AA^+$ se, e somente se, B é tal que $ABA = A$ e AB é simétrica.

Prova: Se $AB = AA^+$ então $ABA = AA^+A = A$ **e** AB é simétrica pois AA^+ é simétrica.

$ABA = A \Rightarrow ABAB = AB$ Se $ABA = A$ então $ABAB = AB$ e, como AB é simétrica, segue que AB é um projetor ortogonal sobre $Im(A)$. Como AA^{+} é um projetor ortogonal sobre $Im(A)$ as duas matrizes são iguais. □

Também é possível uma construção geométrica da inversa de quadrados mínimos. A construção é semelhante à anterior só que agora se toma em $\mathbb{R}^n$ um subespaço W tal que $dim(W) = dim(Ker(A))$ e $\mathbb{R}^n = Im(A^t) \oplus W$. A inversa generalizada de quadrados mínimos A^{-} aplicada em um vetor y é definida da forma: Projeta-se y em $Im(A)$ paralelamente ao subespaço $Ker(A^t)$, obtendo-se o vetor y^p. Toma-se um vetor x tal que $Ax = y^p$. Projeta-se o vetor x em W paralelo ao subespaço $Ker(A)$ obtendo-se o vetor $x - x^p$. A^{-} assim definida é uma inversa de quadrados mínimos. De fato, por construção, $AA^{-}(y) = y^p$ é a projeção ortogonal de y em $Im(A)$ relativa ao subespaço $Ker(A^t)$. Como projetores ortogonais são simétricos, tem-se que AA^{-} é uma matriz simétrica.

Proposição 6 Se A^{-} é uma inversa de quadrados mínimos de A, então $A^t AA^{-} = A^t$.

Prova: Para todo *y*, $A^t AA^{-}(y) = A^t(y^p) = A^t(y)$. □

Um algoritmo simples para obtenção de inversas generalizadas reflexivas é apresentado por Searle (1971): Dada uma matriz *A*, mxn, de posto *r*, faz-se:

i) Tome *r* linhas e r colunas da matriz A, de forma que a submatriz *M*, rxr, assim obtida, tenha posto *r*.

ii) Obtenha $\left(M^{-1}\right)^t$, a transposta da inversa de *M*.

iii) Substitua em *A* os elementos de *M* pelos seus correspondentes em $\left(M^{-1}\right)^t$.

iv) Faça todos os outros elementos de *A* iguais a zero.

v) Transponha a matriz obtida

O processo acima resulta em uma inversa generalizada reflexiva de *A*.

A demonstração de que esse processo realmente resulta na inversa utiliza matrizes de permutação e, portanto, é bastante algébrica. A construção geométrica das inversas reflexivas permite uma nova demonstração:

Prova: Sejam $e_1, e_2, ..., e_n$ e $l_1, l_2, ..., l_m$ as bases canônicas de, respectivamente, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Escolher *r* linhas da matriz *A* é equivalente a escolher r vetores, $l_{i_1}, l_{i_2}, ..., l_{i_r}$, da base

$l_1, l_2, ..., l_m$ e escolher *r* colunas é tomar $e_{j_1}, e_{j_2}, ..., e_{j_r}$ da base $e_1, e_2, ..., e_n$. Ficam assim determinados dois subespaços de dimensão *r*, $V \subset \mathbb{R}^n$ e $H \subset \mathbb{R}^m$, gerados por esses vetores. O subespaço $Im(A)$ é gerado pelas *r* colunas escolhidas. A submatriz *M* determinada por essas escolhas define um isomorfismo linear $M : V \to H$ com inversa $M^{-1} : H \to V$. A matriz *A* aplicada em um vetor, determina uma combinação linear das *r* colunas escolhidas. Esta mesma combinação linear, com as mesmas *r* colunas, e com somente os elementos das *r* linhas escolhidas, determina um elemento no subespaço *H*. Dessa forma, fica definido um isomorfismo entre $Im(A)$ e *H*. Tem-se, então, a construção da inversa generalizada reflexiva da forma: Escolhe-se um subespaço W, complementar à $Im(A)$. Dado $y \in \mathbb{R}^m$ projeta-se *y* em $Im(A)$ paralelamente a *W*, obtendo-se o vetor. Com o isomorfismo entre $Im(A)$ e *H*, projeta-se y^p em *H* e, através de $M^{-1} : H \to V$ obtém um vetor *x* em *V*. Tem-se que $Ax = y^p$ e, portanto, a inversa generalizada está bem definida. Um exemplo elementar pode esclarecer a construção acima: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A imagem de *A* são os vetores da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma \\ \alpha + \beta + 2\gamma \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (\alpha + \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (\beta + \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, uma projeção possível em $Im(A)$, que é equivalente a uma escolha do subespaço *W*, é $y^p = \begin{bmatrix} y_1 + y_3 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \end{bmatrix}$. Projetando-se agora y^p sobre o subespaço *V*, gerado pelos vetores $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, obtém - se $\begin{bmatrix}y_1+y_3\\y_1+y_2+2y_3\\0\end{bmatrix}$. $M^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$ aplicado em $\begin{bmatrix}y_1+y_3\\y_1+y_2+2y_3\end{bmatrix}$ resulta em $\begin{bmatrix}y_1+y_3\\y_2+y_3\end{bmatrix}$. A matriz *A*, aplicada em $\begin{bmatrix}y_1+y_3\\y_2+y_3\\0\end{bmatrix}$ resulta em y^p. □

4 Conclusões

1) A abordagem geométrica na teoria das inversas generalizadas é didática e conceitualmente interessante. As propriedades passam a ter um significado intuitivo. Algumas dessas propriedades podem ser facilmente demonstradas.

2) A generalização da abordagem geométrica da inversa de Moore-Penrose às demais inversas generalizadas (inversas reflexivas quadrados, podendo ser estendida a inversa generalizada de mínimos quadrados) é simples e não acrescenta nenhuma dificuldade à teoria.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações.** Porto Alegre: Bookman, 2001. 572p.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row Brasil, 1984. 411 p.

GRAYBILL, F. A. **An introduction to matrices with applications in the statistics.** New York: Mcgraw Hill, 1961. 463p.

GRAYBILL, F. A. **Theory and application of the linear model**. Boston: Wadsworth Publishing Company, 1976, 704p.

HOFFMANN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP/Polígono, 1971.

IEMMA, A. F. **Modelos Lineares: uma introdução para profissionais de pesquisa agropecuária.** Piracicaba: RBRAS, 1987. 275p.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. 357p. (Coleção Matemática Universitária).

MOORE, E. H. On the reciprocal of the general algebraic matrix. **Bulletin of the American Mathematical Society**, Lancaster, v. 26, n. 8, p.394-395, 1920.

MORAIS, A. R.; CHAVES, L. M.; COSTA, M. C. P. T. **Introdução à álgebra de matrizes**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2001. 240p.

PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, Cambridge, v. 51, n. 3, p. 406-413, July 1955.

RAO, C. R. **Linear statistical inference and its applications**. 2. ed. New York: J. Wiley, 1973.

RAO, C. R. A note on a generalized inverse of matrix with applications to problems in mathematical statistics. **Journal of the Royal Statistics Society:** series B, methodological, Londres, v. 24, n. 1, p. 152-158, 1962.

RAO, C. R.; MITRA, S. K. **Generalized inverse of matrices and its applications**. New York: J. Wiley, 1971.

SEARLE, S. P. **Matrix algebra useful for statistics.** New York: J. Wiley, 1982. 438p.

SCHOTT, J.R. **Matrix analysis for statistics.** 2. ed. New Jersey: J. Wiley, 2005. 456p.