

PLANOS EXPERIMENTAIS COM RESTRIÇÕES NA ALEATORIZAÇÃO ENVOLVENDO MISTURAS

SILVA, Allan Robert⁽¹⁾, VIVACQUA, Carla Almeida⁽²⁾
DANIEL, Carlos Raphael Araújo⁽¹⁾.

(1)Departamento de Estatística e Ciências Atuariais (DECAT) - UFS

(2)Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Estatística
(PPGMAE) - UFRN

all_robert02@yahoo.com.br

Resumo

Durante a fase de planejamento de um experimento, um dos grandes desafios é lidar com a limitação de recursos. Assim, planos completamente aleatorizados nem sempre representam uma alternativa viável de realizar um experimento. Naturalmente, planos experimentais com restrições na aleatorização, como os da classe *Split-plot* e *Strip-plot* tornam-se práticos e úteis. Neste trabalho, aborda-se restrições na aleatorização no contexto de experimentos com misturas. O plano sugerido envolve misturas com restrição na aleatorização do tipo *Strip-plot* possuindo réplicas somente do ponto central dos componentes da misturas e das variáveis de processo. O objetivo é verificar a eficiência de métodos de estimação de parâmetros para este tipo de experimento. Serão observados o método do Erro Puro e da Máxima verossimilhança Restrita. Ao final, discussões sobre os resultados obtidos e sugestões para novas investigações são dadas.

Palavras-Chave: Parcelas subdivididas (*Split-plot*) , Experimentos em faixa (*Strip-plot*), Variáveis de processo, Ponto central, Experimentos não replicados.

Introdução

A fase mais importante de um experimento é o seu planejamento. É nesse momento que o experimentador se depara com alguns desafios, como obter informações úteis sobre o processo em estudo com recursos limitados, incluindo tempo e dinheiro. Nesse sentido, é de interesse para o pesquisador a diminuição do número de provas. Em muitas aplicações, especialmente na área de Engenharia, nem sempre é possível utilizar planos completamente aleatorizados devido ao alto custo envolvido, seja pela quantidade excessiva de unidades experimentais que devam ser produzidas ou devido ao uso de testes em que é necessário a destruição das unidades experimentais. Para reduzir o esforço experimental, em geral, são utilizados planos experimentais com restrições na aleatorização, como os planos *split-plot* e *strip-plot*. Além disso, no meio industrial, a urgência de respostas e a necessidade de redução de custos tornam necessária a realização de experimentos sem a presença de réplicas.

Objetivo

O objetivo geral deste trabalho é verificar a eficiência dos métodos do Erro Puro e Máxima verossimilhança Restrita na estimação de parâmetros para um plano experimental que envolve a combinação de um experimento fatorial e um experimento com misturas com restrição na aleatorização do tipo *strip-plot*.

Experimentos com Mistura e Variáveis de Processo com Restrição na Aleatorização

Kowalski et. al. (2002) comparam três métodos de estimação em um experimento com restrição na aleatorização do tipo *split-plot*. Entre os métodos testados se destacaram o método do Erro Puro e o da Máxima Verossimi-

lhança Restrita (MVR). Com base neste resultado, surgiu o interesse em verificar a eficiência desses métodos de estimação em um experimento com restrição na aleatorização do tipo *strip-plot*.

Cornell(90) apresenta um modelo combinado de misturas e variáveis de processo (MVP) cujo objetivo é expressar a variável resposta como uma função das propriedades da mistura, dos efeitos das variáveis de processo e das interações entre ambos. Quando um modelo quadrático de q misturas representadas por x_1, x_2, \dots, x_q é combinado com um modelo de n variáveis de processo dadas por z_1, z_2, \dots, z_n , em que somente os efeitos principais das variáveis de processo são cruzados com os efeitos lineares da mistura, o modelo combinado MVP é dado por:

$$\eta(x, z) = \sum_{i=1}^q \beta_i x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{k < l}^n \alpha_{kl} z_k z_l + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} x_i z_k \quad (1)$$

Esse modelo contém $[(q + n)^2 + q - n] / 2$ termos.

Para um plano *strip-plot* ser considerado balanceado deve existir o mesmo número de formulações da mistura em cada combinação das variáveis de processo e, ao mesmo tempo, cada combinação da mistura deve ser exposta a um mesmo número de combinações de variáveis de processo. A Figura 1, abaixo, é um exemplo de experimento balanceado para o plano *strip-plot*.

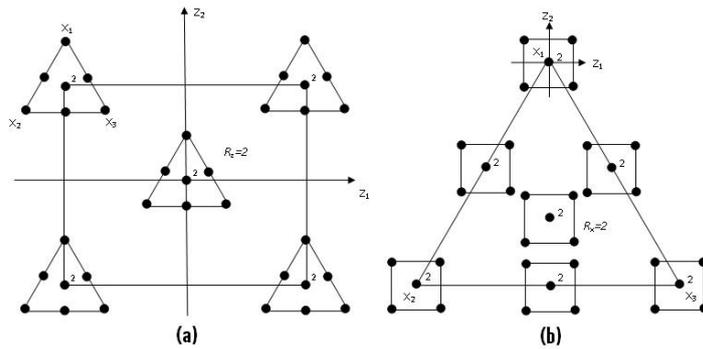


Figura 1: Plano *strip-plot* proposto para o ajuste da equação (4.3)

O plano observado possui sete formulações de misturas e cinco combinações das variáveis de processo com réplica do ponto central destas. Esse plano é balanceado, pois cada combinação de variáveis de processo têm oito formulações de mistura e cada formulação das misturas é exposta a seis combinações de variáveis de processo.

Estimação do Modelo

Em um experimento do tipo *split-plot* a estrutura de erro conta com duas fontes de erro, uma associada ao plot e outra associada ao subplot, já em um plano *strip-plot* existem três fontes de erro, um erro associado a cada plot e um terceiro erro associado às unidades.

O modelo do experimento pode ser descrito por:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\epsilon} , \text{ em que } \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\epsilon} \sim N(0, \mathbf{V})$$

Se existem N unidades experimentais, a matriz \mathbf{V} representa a matriz de variância-covariância de um vetor de resposta \mathbf{y} de dimensão $N \times 1$. A matriz $\boldsymbol{\delta}$, de dimensão $N \times N$, representa a matriz de variância-covariância dos plots das variáveis de processo e, dentro desta, o parâmetro σ_z^2 refere-se ao erro proveniente da aleatorização das combinações das variáveis de processo. Analogamente, a matriz $\boldsymbol{\lambda}$, refere-se às formulações da mistura e σ_x^2 o erro associado. Por fim, a matriz $\boldsymbol{\epsilon}$ representa erro associado às unidades e σ_e^2 é um parâmetro referente ao erro proveniente da alocação de uma unidade experimental a uma combinação dos componentes da mistura e das variáveis de processo.

Resultados

Os resultados a seguir foram obtidos a partir sete combinações de parâmetros do modelo. Para cada uma destas combinações foram utilizadas outras sete

combinações das três fontes de erro. A Tabela 1 mostra algumas variações dos parâmetros do modelo usados na simulação.

Tabela 1: Parâmetros do modelo	
Fontes de Erro	Parâmetros
$(\sigma_z, \sigma_x, \sigma_e)$	$(\beta_1, \beta_{12}, \alpha_{12}, \gamma_{11})$
(1,1,1)	(100,10,10,10)
(2,2,1)	(10,100,10,10)
(4,2,1)	(10,10,100,10)

A Figura 2, abaixo, a estimativa dos parâmetros em 5.000 simulações obtidas em três das sete variações das fontes de erro, em que os parâmetros do modelo são $\beta_1 = 100$, $\beta_{12} = 10$, $\alpha_{12} = 10$, $\gamma_{11} = 10$ e os demais parâmetros têm valor zero, com fontes de erro $\sigma_z = 1$, $\sigma_x = 1$ e $\sigma_e = 1$.

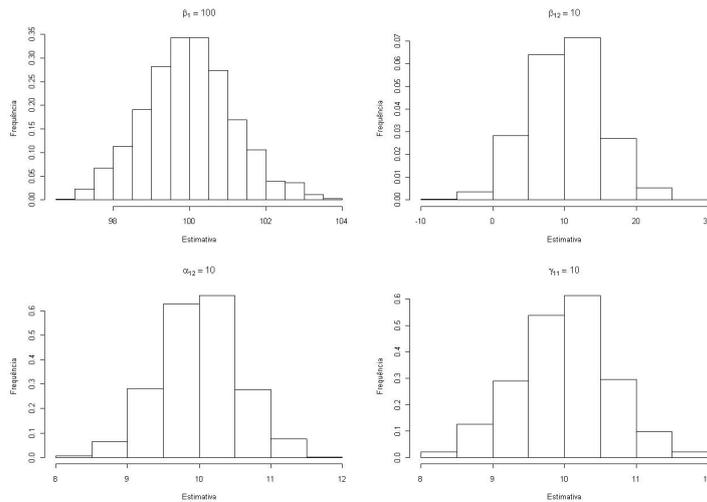


Figura 2: Estimativas dos Parâmetros do modelo

A Figura 2 indica que as estimativas dos parâmetros são centradas e com pouca variabilidade, com exceção das estimativas de β_{12} que apresenta uma estimativa centrada, mas com maior variabilidade. Esse comportamento ocorreu em todas as combinações das fontes de erro e em cada combinação dos parâmetros do modelo.

Conclusões

A partir das simulações, a conclusão obtida é que os métodos apresentam estimativas centradas, mas com alta variabilidade nas estimativas das interações entre os componentes da mistura. Uma grande vantagem do método da MVR comparado ao método do Erro Puro é que este depende de que haja alguma réplica de um tratamento do experimento, enquanto o método da MVR não depende disto.

Principais Referências

- BOX, G. and JONES, S (1992). Split-plot designs for robust product experimentation, *Journal of Applied Statistics*.
- CORNELL, J.A (1990). *Experiments with mixtures, designs, models, and the analysis of mixture data*. 2.ed. John Wiley.
- KOWALSKI, S.M. and CORNELL, J.A. and VINING, G.G (2002). Split-plot designs and estimation methods for mixture experiments with process variables, *Technometrics*.
- VIVACQUA, C.A. and BISGAARD, S.(2004). Strip-block experiments for process improvement and robustness. *Quality Engineering*.