Um modelo estatístico para precificação de opções européias utilizando simulação

Leandro T. L. de Souza, Vinícius C. N. Siqueira, Vinícius V. Melo e Matheus Menes

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística,

ICMC, Universidade de São Paulo,

Caixa Postal 668, São Carlos, SP 13560-970, Brazil

1 Introdução

Em maio de 2001, devido a importantes iniciativas de mercados internacionais, A BOVESPA mobilizou-se para implantar a negociação de futuro de ações no Brasil. Uma operação no Mercado Futuro de Ações da BOVESPA compreende a compra ou a venda de ações listadas em Bolsa, a um preço acordado entre as partes, para liquidação em uma data futura específica, previamente autorizada. Normalmente, o esperado é que o preço do contrato futuro de uma determinada ação seja equivalente ao preço a vista, acrescido de uma fração correspondente à expectativa de taxas de juros entre o momento da negociação do contrato futuro de ações e a respectiva data de liquidação do contrato.

A opção Call fornece ao comprador o direito de comprar um ativo a um preço pré-fixado K até um momento anterior à data da expiração, enquanto que uma opção put fornece ao comprador da opção o direito de vender o ativo específico a um preço pré-fixado até um momento anterior ao da data de expiração da opção. Em ambos os casos o comprador paga um preço por este direito e exerce ou não este direito caso seja vantajoso para ele.

Atualmente diversos tipos de opções são comercializadas no mercado. As duas mais utilizadas são a American Option, que pode ser exercida em qualquer momento anterior a data de expiração e a European Option, que pode ser exercida somente na data de expiração. Associado a opções temos diversos problemas, tais como o desenvolvimento de um modelo que atenda as condições de mercado, a estimação dos parâmetros associados ao modelo, a precificação da opção (custo inicial), o desenvolvimento de uma estratégia de replicação (*hedging*), estuda da sensibilidade do valor da opção em relação ao valor do ativo (Greeks), entre outros. Neste trabalho vamos propor um modelo simples para o mercado e estudar o problema de precificação e replicação para opções européias.

Utilizaremos a estratégia proposta por Leão e Ohashi (2009) para aproximar funcionais de Wiener baseado em um processo de discretização aleatória para estabelecer um modelo para o mercado, bem como fórmulas para a precificação e replicação associadas ao mercado futuro de opções.

2 Metodologia

Inicialmente, para que possamos entender o modelo, vamos revisar alguns resultados obtidos por Leão e Ohashi [1]. Para qualquer inteiro positivo k, definimos $T_0^k = 0$ q.c. e

$$T_n^k = \inf\{T_{n-1}^k < t < \infty; |B_t - B_{T_{n-1}^k}| = 2^{-k}\}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

A família $(T_n^k)_{n\geq 0}$ é uma sequência de $\mathbb{F}$-tempos de parada para todo k, no qual os incrementos $\{T_n^k - T_{n-1}^k; n \geq 1\}$ é uma sequencia i.i.d. com mesma distribuição de T_1^k. Com isso, definimos a família de processos do tipo escada

$$A_t^k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k}\theta_n^k \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad k \geq 1,$$

no qual

$$\theta_n^k = \begin{cases} 1 & ; \quad B_{T_n^k} - B_{T_{n-1}^k} = 2^{-k} \ \text{ and } \ T_n^k < \infty \\ -1 & ; \quad B_{T_n^k} - B_{T_{n-1}^k} = -2^{-k} \ \text{ and } T_n^k < \infty \\ 0 & ; \quad T_n^k = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Seja $(\mathcal{F}_t^k)_{t\geq 0}$ a filtração natural gerada por $\{A_t^k; 0 \leq t < \infty\}$.

Como foi mostrado em Leão e Ohashi [1] qualquer funcional de Wiener X, com energia finita, pode ser aproximado por semimartingales especiais com respeito a base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}^k, \mathcal{F}^k, \mathbb{P})$. Vamos propor uma aproximação ao modelo de Blach e Scholes. Dado um k fixo, vamos definir o mercado em relação a esta base estocástica. O processo solução forte da equação diferencial estocástica

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é um funcional de Wiener. Então o processo X^k pode ser representado por

$$X_t^k = X_0 + \int_0^t b_s^k ds + \oint_0^t D_s^k dA_s^k = X_0 + \int_0^t D_s^k dA_s^k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

no qual $\{b_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ é o processo de médias e o processo volatilidade estocástica $\{D_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ corresponde a derivada estocástica do processo estocástico X^k com respeito ao ruído branco A^k. Diferente do caso contínuo, o processo derivada estocástica D^k caracteriza tanto a parte sistemática (média) quanto a parte martingale. No modelo de Black e Scholes tradicional, temos que $b_t = b$, $\sigma_t = \sigma$, com $b \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ constantes.

Como no modelo de Black e Scholes, considere um mercado composto por dois ativos (um com risco e outro sem) que são negociados continuamente. O ativo sem risco, denominado Bond e denotado por $S_t^{0,k}$ no tempo t, tem o processo de preço definido conforme a equação diferencial

$$\frac{\Delta S^{0,k}_{T^k_n}}{S^{0,k}_{T^k_{n-1}}} = r^k_{T^k_{n-1}}(T^k_n - T^k_{n-1}), \quad S_0^{0,k} = 1, n \geq 1. \tag{3}$$

cuja solução é dada pelo produto integrado

$$S_t^{0,k} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + r^k_{T^k_{n-1}}(T^k_n - T^k_{n-1})\right] \mathbb{1}_{\{T^k_n \leq t\}}.$$

onde a família $\{T^k_n\}_{n\geq 0}$ é uma sequência de $\mathbb{F}$-tempos de parada para todo k dada pela discretização aleatória do movimento Browniano. Já o ativo com risco, denominado *stock* e denotado por S_t^k no tempo t tem o seu processo de preço modelado pela equação diferencial estocástica

$$\frac{\Delta S^k_{T^k_n}}{S^k_{T^k_{n-1}}} = D^k_{T^k_n} \Delta A^k_{T^k_n}, \quad S^k_0 = s, \ n \geq 1. \tag{4}$$

que tem uma única solução dada por

$$S_t^k = s \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + D^k_{T^k_n} \Delta A^k_{T^k_n}\right] \mathbb{1}_{\{T^k_n \leq t\}}. \tag{5}$$

Considere um investidor que inicia sua aplicação nos dois ativos (*Bond* e *Stock*) com um investimento inicial $c > 0$. Assumimos que a transferência de dinheiro entre os ativos pode ser realizada a qualquer momento e sem custos transacionais. Além disso, os ativos são infinitamente divisíveis, isto é, o investidor pode comprar ou vender qualquer quantidade do ativo.

O processo portfolio $\pi = \{(\beta^k_t, \gamma^k_t) : 0 \leq t \leq T\}$ representa à quantidade de ativos comprados pelo investidor no tempo t, β^k_t referente ao ativo sem risco e γ^k_t referente ao ativo com risco. Desta forma, temos que $c = \beta^k_0 S^{0,k}_0 + \gamma^k_0 S^k_0 = \beta^k_0 + \gamma^k_0$ e o capital do investidor no tempo t é dado por

$$C^{\pi,k}_t = \beta^k_t S^{0,k}_t + \gamma^k_t S^k_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Definition 2.1 *Dizemos que um portfolio $\pi = \{(\beta^k_t, \gamma^k_t) : 0 \leq t \leq T\}$ é auto-financiável se*

$$\Delta\beta^k_{T^k_n} S^{0,k}_{T^k_{n-1}} + \Delta\gamma^k_{T^k_n} S^k_{T^k_{n-1}} = 0, \quad n \geq 1.$$

ou seja, não há entrada de capital externo e nem saída do capital investido. A classe de todos os portfolios π auto-financiáveis será denotada por SF.

2.1 Problema de precificação e estratégia de *hedging* das opções européias

Suponha que o investidor assina um contrato que lhe fornece a opção de comprar, em um tempo especificado T, um lote do ativo com risco (*stock*) a um preço pré-especificado K. No tempo de maturidade (T), se o preço do ativo S_T^k for maior que o *strike price* (K), o investidor exerce seu direito de compra, caso contrário ele não exerce. Este contrato, que denominamos opção européia, é equivalente ao pagamento de

$$\left(S_T^k - k\right)^+ \;=\; S_T^k - k, \quad \text{se } S_T^k - k > 0, \quad \text{ou} \quad \left(S_T^k - k\right)^+ \;=\; 0, \quad \text{se } S_T^k - k \leq 0,$$

no tempo de maturidade (T). Denotamos por $F_T = \left(S_T^k - k\right)^+$ a função payoff associado a opção européia.

Definition 2.2 *Dados $c > 0$ um investimento inicial e $\{(\beta_t^k, \gamma_t^k) : 0 \leq t \leq T\}$ um processo portfolio admissível para este investimento inicial, dizemos que este processo portfolio é uma estratégia de hedging para a função payoff F_T se $C_T^k = F_T$, no qual C^k é o capital associado a este portfolio e investimento inicial $c > 0$.*

O conceito de estratégia de hedging foi introduzido para permitir uma solução ao problema de precificação de opções. Qual o preço justo a ser pago por uma opção no instante $t = 0$? Se existe uma estratégia de *hedging* que é admissível para o investimento inicial $c > 0$, então um agente que compra a opção no tempo $t = 0$ por c pode investir seu capital de tal forma a obter, pelo menos, o valor da função *payoff* da opção. Desta forma, um preço justo para a opção é o menor valor de $c > 0$ para o qual é possível construir uma estratégia de *hedging* com capital inicial $c > 0$.

3 Resultados

Através do modelo de mercado proposto, desenvolvemos um algoritmo para determinar o preço justo de uma opção européia e a estratégia de *hedging*. Além disso, realizamos uma comparação entre o modelo proposto e o modelo tradicional de Black e Scholes.

3.1 Algoritmo para precificação

1. O primeio passo é gerar uma amostra aleatória dos tempos de parada $\{T_n^k\}_{n\geq 0}$.

Os incrementos $\{T_n^k - T_{n-1}^k; n \geq 1\}$ é uma sequência i.i.d. com mesma distribuição de T_1^k com a seguinte relação $T_1^k = 2^{-2k}\tau$, onde a função densidade de probabilidade τ é dada por

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k g_{(1+2k)}(t), \ t \geq 0, \ \text{e} \quad g_y(t) = \frac{y}{\sqrt{2\pi t^3}} exp{-y^2/2t}, \ t \geq 0. \tag{6}$$

Usamos o algoritmo de rejeição proposto por Zaeem A. Burq e Owen D. Jones (2006) para calcular os valores de T_1^k.

2. O segundo passo é calcular a discretização do movimento browniano A_t^k da seguinte forma

$$A_t^k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k} \sigma_n^k \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad k \geq 1,$$

no qual σ_n^k é uma sequência i.i.d. Bernoulli com $\mathbb{P}(\sigma_n^k = 1) = 1/2$ e $\mathbb{P}(\sigma_n^k = -1) = 1/2$

3. O terceiro passo é calcular a evolução do *stock* como visto em (5).

4. O quarto passo é calcular a função *payoff* descontado da seguinte forma:

$$\tilde{F}_T = \frac{F_T}{S_T^{0,k}} = \frac{\left(S_T^k - k\right)^+}{S_T^{0,k}}$$

5. Repetir n vezes os passos 1-4 e guarda os valores obtidos no passo 4.

6. Para precificar o valor da opção c, calcule a média amostral de $\tilde{F}_T$.

4 Aplicação

Como ilustração do algoritmo proposto selecionamos um exemplo em Hull J. C. (2002) página 299. "Usando como exemplo a posição de uma instituição financeira que vendeu por R$ 300.000 uma opção européia de compra sobre 100.000 lotes de uma ação que não paga dividendos. Assumimos que o preço das ações é de R$ 49, e o preço de exercício ou *strike price* é de R$ 50, a taxa de juros sem risco ou *Bond* é de 5% ao ano, a volatilidade do preço das ações é de 20% ao ano, o tempo de maturação é de 20 semanas (0.3846 ano), e o retorno esperado da ação é de 13% por ano."

Com a notação desse trabalho, isso significa que

$$S_0^k = 49, \quad K = 50, \quad r_t^k = 0.05, \quad \sigma_t^k = 0.20, \quad T = 0.3846 \quad b_t^k = 0.13 \ \text{ com } 0 \leq t \leq T$$

Segundo o modelo de Black-Scholes o preço da opção é R$ 2.400461 por lote, aproximadamente 240.000 dólares. Através do algoritmo descrito na seção 3.1 com $n = 1000$ o preço da opção é R$ 2.41217 por lote, aproximadamente 241.000 dólares.

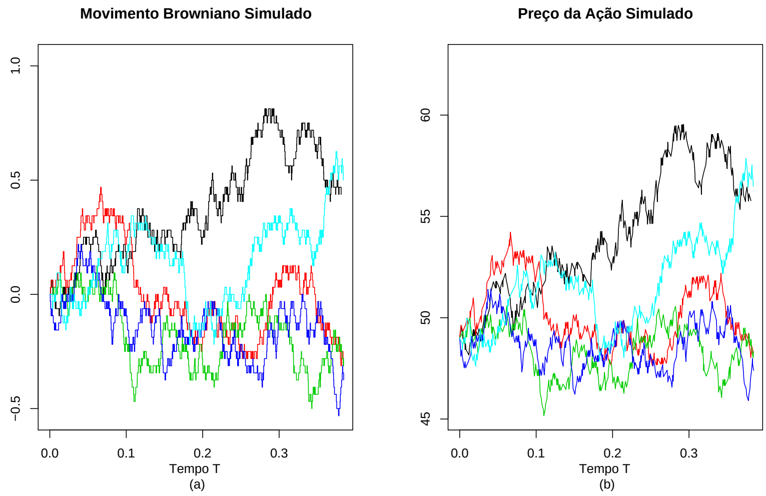

Figura 1: O gráfico (a) mostra 5 trajetórias discretizadas do movimento browniano, O gráfico (b) mostra 5 evoluções do preço da ação.

Referências

[1] Leão, D. and Ohashi, A. (2009). Weak approximations for Wiener functionals. *Preprint.*

[2] Hull, J. C. (2002, July). Options, Futures, and Other Derivatives (5th Edition). Prentice Hall.

[3] Burq, Z.A., and Jones, O. D. (2007). Simulation of Brownian motion at first-passage times. *Math. Comput. Simulation.* **77**, 1, 64-71.