

PADRONIZAÇÃO DE MODELOS TEÓRICOS DE PROBABILIDADE PARA SISMOS DIÁRIOS NO MUNICÍPIO DE JOÃO CÂMARA/RN

Raimundo Nonato Castro da Silva
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
nonato@ufac.br

Paulo Sergio Lúcio
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - Brasil
Departamento de Estatística
Centro de Geofísica de Évora - Portugal
pslucio@ccet.ufrn.br

Francisco Márcio Barboza
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
mat_marcio@ufac.br

Manoel Domingos Filho
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
manoelufsc@yahoo.com.br

Antonio Carlos Fonseca Pontes
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
acfpones@yahoo.com.br

Antonio Carlos Fonseca Pontes Junior
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
acfponesjr@gmail.com

Altemir da Silva Braga
Universidade Federal do Acre - Brasil
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia -CCET
altemir@ufac.br

RESUMO

No presente trabalho, foi feito um ajuste da Distribuição Generalizada de Pareto (GPD) para uma seqüência de sismos intraplacas, que ocorreu no município de João Câmara, NE do Brasil o qual foi monitorada continuamente durante dois anos (1987 e 1988). Esses dados foram utilizados para avaliar a ocorrência de eventos extremos na região. A fim de estimar os parâmetros da GPD, foram utilizados os seguintes métodos: máxima verossimilhança (MLE), máxima verossimilhança penalizada (MPLE), métodos dos momentos (moments), Pickands (Pickands), momentos ponderados pela probabilidade (viesado-PWMB e não-viesado-PWMU), divergência média da densidade (MDPD), melhor qualidade do ajuste (MGF), mediana (MED) e o método da máxima entropia (POME). Onde o método da máxima verossimilhança e o da máxima entropia foram os mais eficientes. Com esse ajuste, verificou-se que os sismos com magnitude de 1,5^o deve ocorrer num período de retorno estimado de aproximadamente dez dias, por outro lado um sismo de 2,5^o estima-se que ocorra a cada 500 dias, já o sismo histórico aquele que está no imaginário popular ocorrido em novembro de 1986, é pouco provável, pois o seu período de retorno é para 300 anos.

1- Introdução

Os abalos sísmicos quando ocorrem, podem causar grandes impactos na sociedade, por essa razão tanto as autoridades governamentais como os pesquisadores têm procurado modelar esse fenômeno para que os mesmos possam ser preditos com alguma segurança e eficiência, desta maneira auxiliando nas ações preventivas, bem como no planejamento e execução de políticas públicas.

Em muitas situações práticas existe o interesse de modelar a cauda das distribuições, como o ocorre, por exemplo, com os sismos, essa modelagem deve ser feita através de uma seqüência de sismos, onde deve-se observar a distribuição do máximo de uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e assumir que a F_x é desconhecida, e olha para as famílias aproximadas dos modelos de $[F_x(X)]^n$ e utilizar a teoria de valores extremos, proposta por Fisher e Tippett (1928) ou utilizar um importante teorema limite conhecido como distribuições acima de um limiar (*Peaks-over-Threshold* - POT), conhecido como teorema de Gnedenko-Pickands-Balkema-Haan (1941).

A proposta do presente trabalho é modelar os sismos através da distribuição generalizada de Pareto, bem como fazer previsões/previsões baseado no período e nível de retorno dos mesmos.

1 A Distribuição Generalizada de Valores Extremos (GEV)

Seja X uma variável aleatória, assumindo valores nos reais. A freqüência relativa com que estes valores ocorrem define a distribuição de freqüência ou distribuição de probabilidade de X e é especificada pela função de distribuição acumulada dada por: $F_x(X) = P(X \leq x)$, $F_x(X)$ é uma função não-decrescente de X , e $0 \leq F_x(X) \leq 1$ para todo o X . Em geral, estamos interessados em variáveis aleatórias contínuas, para o qual $P(X = x) = 0$ para todo X , isto é, as probabilidades pontuais são nulas. Neste caso, $F_x(.)$ é uma função contínua e tem uma função inversa $x(.)$, a função quantil de X . Dado qualquer valor z_p , $0 < z_p < 1$, $x(z_p)$ é o único valor que satisfaz:

$$F_x(X(z_p)) = z_p$$

Para uma probabilidade p , $x(p)$ é o quantil da probabilidade não excedente p , isto é, o valor tal que a probabilidade de X não exceder $x(p)$ é p . O objetivo da análise

de frequência é estimar corretamente os quantis da distribuição de uma variável aleatória.

A abordagem clássica da teoria de valores extremos consiste em caracterizar as caudas (superior ou inferior) da distribuição de F_x a partir da distribuição do máximo. Assim, definimos $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ como o máximo de um conjunto de n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Para obter-se a distribuição do mínimo usa-se a relação:

$$\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(X_1, \dots, X_n)$$

Na teoria a função de distribuição exata do máximo pode ser obtida para todos os valores de n , da seguinte forma:

$$F_{M_n} = P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = [F_x(X)]^n,$$

para $x \in \mathbf{IR}$ e $n \in \mathbf{N}$. Todavia, este resultado não é útil na prática, visto que não conhecemos a função de distribuição de F_x . Segundo Coles (2001), uma possibilidade é utilizar técnicas estatísticas para estimar F_x para dados observados, e substituir esta estimativa na equação acima. Infelizmente, pequenas discrepâncias na estimativa de F_x podem conduzir a substanciais discrepâncias em $[F_x(X)]^n$.

Uma alternativa é aceitar que F_x seja desconhecida, e olhar para as famílias aproximadas dos modelos de $[F_x(X)]^n$, que pode ser estimado com base somente em dados extremos. Isto é similar a prática usual de aproximar a distribuição da média amostral pela distribuição normal, como justificado pelo teorema central do limite (TCL). Além disso, podemos pensar que o comportamento assintótico de M_n pode estar relacionado com a cauda de F_x próximo do limite superior do suporte da distribuição de X , pois os valores do máximo são aqueles que se localizam perto desse limite. Dessa maneira, denotamos por: $x_{F_x} = \sup\{x \in \mathbf{IR} : F_x(X) < 1\}$, o limite superior do suporte da distribuição de F_x . Observamos que, para todo $x < x_{F_x}$.

$$P(M_n \leq x) = P[F_x(X)]^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

e, no caso de $x_{F_x} < \infty$, temos para $x > x_{F_x}$ que:

$$P(M_n \leq x) = P[F_x(X)]^n = 1,$$

logo, à medida que n cresce a distribuição de M_n é degenerada¹ sendo, portanto, um resultado que não fornece muita informação.

Esta dificuldade pode ser sanada considerando-se uma seqüência de constantes $\sigma_n > 0$ e μ_n tais que:

$$M_n^* = \frac{M_n - \mu_n}{\sigma_n}$$

converja para uma função não-degenerada, para $n \rightarrow \infty$. O teorema seguinte fornece o resultado de convergência em distribuição para o máximo centrado e normalizado.

Teorema (Fisher – Tippett, 1928): seja (X_n) uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Se existirem seqüência de constantes normalizadoras $\sigma_n > 0$ e μ_n e uma distribuição não-degenerada H tal que:

$$\frac{M_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} H,$$

então H é do tipo de uma das três funções de distribuição:

i -Tipo I de Gumbel:

$$H_I(x) = \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right] \right\}, x \in \mathfrak{R};$$

ii -Tipo II de Fréchet:

$$H_{II}(x) = 0, \text{ se } x \leq 0$$

$$H_{II}(x) = \exp \left\{ - \left[\frac{(x - \mu)}{\sigma} \right]^{-\xi} \right\}, \text{ se } x > 0;$$

¹ Em matemática, uma distribuição degenerada é a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta cujo suporte consiste de somente um valor.

iii -Tipo III de Weibull:

$$H_{III}(x) = \exp \left\{ - \left[- \frac{(x-\mu)}{\sigma} \right]^{\xi} \right\}, \text{ se } x \leq 0$$

$$H_{III}(x) = 1, \text{ se } x > 0.$$

Quanto à escolha da distribuição, Coles (2001), afirma que existem dois problemas na prática a serem resolvidos, primeiramente uma técnica para escolher qual das três famílias é a mais apropriada, em seguida, tomada tal decisão e feito a conclusão, presumem que a escolha esteja correta e não é medido o grau de incerteza, embora essa possa ser significativa. Dessa forma Jenkinson (1951), mostrou que as três famílias poderiam ser unificadas em uma única família, a família de valores extremos generalizadas, dada da seguinte forma:

$$H(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\xi}} \right\}.$$

Definida no conjunto $\left\{ x : 1 + \xi \frac{(x-\mu)}{\sigma} > 0 \right\}$, sendo que os parâmetros satisfazem, $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$, o modelo é tri-paramétrico, sendo um parâmetro de localização, um de escala e um de forma, onde o parâmetro ξ é quem determina a forma da distribuição, quando: $\xi > 0$ tem-se a distribuição de Fréchet, $\xi < 0$ obtém-se a de Weibull. Sendo que o limite de $F(x)$ quando $\xi \rightarrow 0$, a distribuição assume a seguinte forma:

$$H(x) = \exp \left[- \exp \left\{ - \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \right], -\infty < x < \infty,$$

que representa a função de distribuição da Gumbell, com parâmetros de localização e escala μ e σ , respectivamente, sendo $\sigma > 0$.

Dessa forma, em vez de se ter que escolher uma família inicialmente, para depois estimar os parâmetros, a inferência se faz diretamente sobre o parâmetro de forma ξ . A Figura 1, apresenta os gráficos da função de distribuição para $\xi = -1,5$ (Weibull), ξ tendendo a zero (Gumbel) e $\xi = 1,5$ (Fréchet), com $\mu = 0$ e $\sigma = 0,4761$.

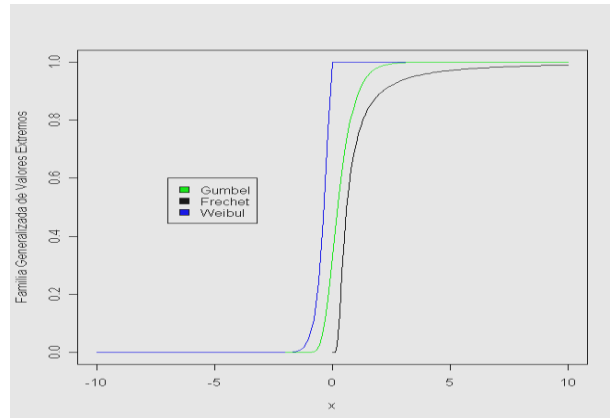


Figura 1: Ilustração das três funções de distribuições acumuladas da família de valores extremos generalizados (GEV).

2 A Distribuição Generalizada de Pareto (GPD)

Suponha X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, tendo função de distribuição F_X . Seja x_{F_X} o limite superior da distribuição de F_X . Chamamos de um limiar alto um valor no suporte de X perto de x_{F_X} . Denominamos “excedentes” aqueles valores X_i tais que $X_i > u$. Denotamos por N_u o número de excedentes do limiar u . Isto é,

$$N_u = \sum_{i=1}^n 1_{(X_i > u)}, \text{ onde: } 1_{(X_i > u)} = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i > u, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Os excessos (pontos excedentes) além do limiar u , denotados por Y_1, \dots, Y_{n_u} são os valores $X_i - u \geq 0$. A Figura 2 mostra as observações X_1, \dots, X_{12} e os excessos além do limiar $u=4$.

Esta abordagem se diferencia da abordagem clássica, pois a teoria clássica se baseia na análise do valor do máximo (ou mínimo) em uma época. Como será visto na definição que se segue, essa abordagem permite a análise de todos os dados disponíveis que excedem um limiar, porém esse limiar deverá garantir a distribuição assintótica de valores extremos, sem as quais não será possível fazer as inferências.

Definição: Dado um limiar u , a distribuição dos valores de x acima de u é dada por:

$$P\{X > u + y | X > u\} = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)}, y > 0,$$

que representa a probabilidade do valor de x ultrapassa u por no máximo um montante u , onde $y = x - u$.

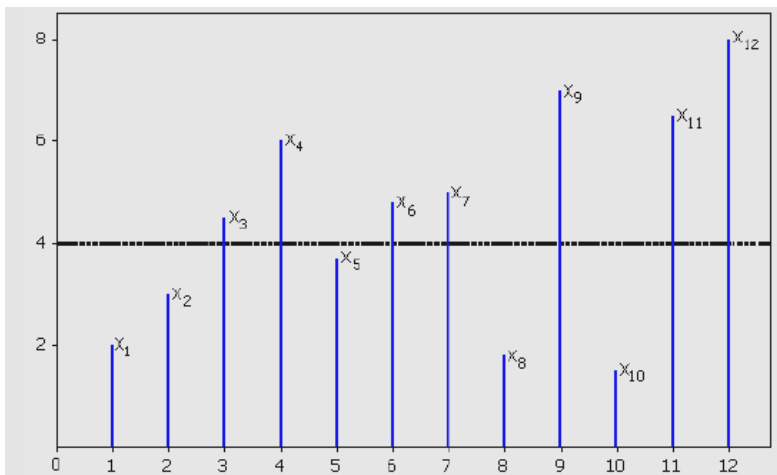


Figura 2: Ilustração do gráfico de barras das observações de uma seqüência de variáveis aleatórias X_1, \dots, X_{12} , onde se destacam os excessos acima do limiar $u=4$.

Seja F uma distribuição generalizada de valor extremo, tal que:

$$F(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \zeta \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}} \right\} \text{ para qualquer } \sigma > 0 \text{ e } \mu, \zeta \in \mathbf{IR}.$$

Então a probabilidade condicional, quando $X > u$, sabendo-se que

$$n \ln F(x) \approx - \left[1 + \zeta \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}, \text{ de acordo com Nonato (2008) temos que para } y > 0,$$

$$1 - F(u + y) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \zeta \left(\frac{u + y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{\zeta}}.$$

Desta forma, tem-se:

$$P\{X > u + y | X > u\} = \frac{1 - F(u + y)}{1 - F(u)} = \frac{\frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u + y - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}}{\frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}} = \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

com $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$.

Assim, a função distribuição de $(X - \mu)$, condicionada a $X > u$, é aproximadamente:

$$H(y) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\tilde{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\xi}},$$

definida em $\left\{ y : y > 0 \text{ e } \left(1 + \xi y / \tilde{\sigma} \right) > 0 \right\}$, onde $\tilde{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$.

Coles (2001) afirma que a família de distribuições definida acima é chamada família generalizada de Pareto. Assim como as distribuições GEV são as distribuições limite para o máximo, as do tipo GPD são as formas paramétricas para distribuições limite de excessos (Teorema de Balkema-de Haan). As distribuições generalizadas de Pareto são da forma Exponencial ($\gamma = 0$), Pareto tipo II ($\gamma > 0$) e Pareto comum ou Beta ($\gamma < 0$).

A Figura 3, apresenta os gráficos da função de distribuição da GPD para $\xi = -0,4$ (Pareto comum ou Beta), ξ tendendo a zero (exponencial) e $\xi = 0,4$ (Pareto tipo II), todas com $\sigma = 2$, observa-se que assim como na GEV o parâmetro ξ é quem determina as caudas da distribuição.

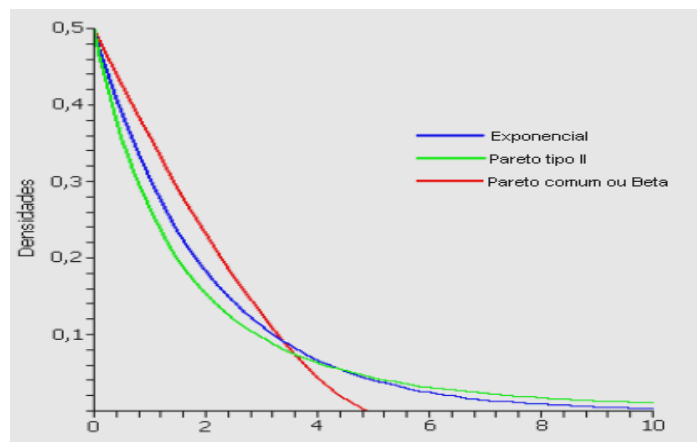


Figura 3: Ilustração da função densidade de probabilidade das três formas da distribuição generalizada de Pareto (GPD).

Por fim, as distribuições GPD e GEV estão relacionadas da seguinte maneira:

$$G(x) = 1 + \ln(H(x)), \ln(H(x)) > -1.$$

Esta relação explica por que as densidades da GPD possuem cauda extrema assintoticamente equivalente às de uma GEV. A Figura 4, ilustra este fato e mostra a proximidade das caudas de algumas distribuições GPD com algumas GEV.

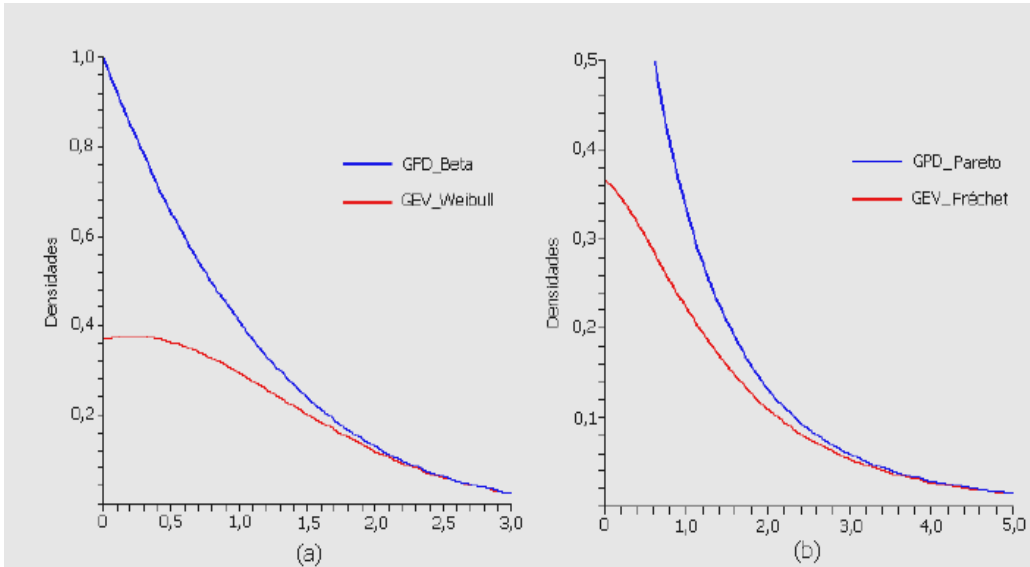


Figura 4: Densidades da GPD e GEV. (a) Pareto comum (Beta) e Weibull, ambas com $\xi = -0,2$; (b) Pareto tipo II e Fréchet, ambas com $\xi = 0,2$. As densidades da GEV todas possuem $\mu = 0$ e todas as densidades possuem $\sigma = 1$.

2.1 Sele o do Limiar

Para a determina o do limiar recorre-se   análise gráfica da linearidade de n_u observa es que excedem os vários limiares u determinados na própria amostra. Assim, o gráfico de vida média residual, usado para a determina o visual de u  

construído da seguinte forma: $\left\{ \left(u, \frac{1}{n_u} \sum_{i=1}^{n_u} (x_i - u) \right) : u < x_{\max} \right\}$, em que x_1, x_2, \dots, x_{n_u}

consistem nas observa es que excedem u e x_{\max}   o valor mais elevado das observa es.

2.2 Métodos de Estima o dos Parâmetros da GPD

Vários métodos de estima o dos parâmetros da GPD já foram propostos, sendo que nos últimos anos o método da máxima entropia (POME) tem sido bastante utilizado por vários autores, em geral Sing e Guo (1995), Oztekin (2004), onde o POME sempre que comparado com outros métodos, obteve menor erro quadrático

médio. Portanto para estimar os parâmetros da GPD pela máxima entropia basta resolver as seguintes equações.

$$E\left\{\ln\left[1-\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right]\right\}=-\xi$$

$$E\left\{\ln\left[\frac{1}{1-\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}}\right]\right\}=-\frac{1}{1-\xi}$$

$$\text{var}\left[\ln\left(1-\frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)\right]=\xi^2.$$

Sendo que a solução das equações é feita por métodos numéricos.

Para verificar a eficiência desse estimador ele foi comparado, através do erro quadrático médio com os seguintes métodos: métodos dos momentos (MOM), Pickands (Pickands), momentos ponderados pela probabilidade: viesado e não-viesado (PWMB, PWMU), divergência média da densidade (MDPD), melhor qualidade do ajuste (MGF), mediana (MED), máxima verossimilhança penalizada (MPLE) e o da máxima verossimilhança (MLE), sendo que neste último, dependendo do valor do parâmetro de forma nem sempre as condições de regularidades são observadas, todavia Brabson e Patutikof (2000), utilizando simulações observaram que $\xi \in (-0,5;0,5)$, nesse caso o estimador de máxima verossimilhança obedece às condições de regularidade, portanto para encontrá-lo basta resolver as equações abaixo por métodos numéricos, uma vez que a solução analítica não é possível.

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{\sum_{i=1}^n \ln\left(1-\frac{\xi(x_i-\mu)}{\sigma}\right)}{\xi^2} + \frac{(1-\xi)\sum_{i=1}^n \frac{x_i-\mu}{\sigma\left(1-\frac{\xi(x_i-\mu)}{\sigma}\right)}}{\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{n}{\sigma} - \frac{(1-\xi)\sum_{i=1}^n \frac{\xi(x_i-\mu)}{\sigma^2\left(1-\frac{\xi(x_i-\mu)}{\sigma}\right)}}{\xi} = 0.$$

3 - Resultados e Discussões

Para a análise dos dados foram catalogados 2733 sismos de forma contínua no período de 23/05/1987 a 07/07/1988, o modelo utilizado foi o POT, pois a ideia era observar os sismos acima de um limiar, portanto a modelagem do sismo máximo foi feita através da distribuição generalizada de Pareto.

A Figura 4 sugere a escolha de um limiar próximo de $1,5^{\circ}$, vale ressaltar que essa não é uma escolha fácil, uma vez que Coles (2001) diz que se deve ter cuidado para não escolher um limiar muito baixo para que não comprometa o comportamento assintótico e nem um limiar muito alto para que esse não deixe muitos máximos que deveriam ser incluídos. Porém na Figura 6 observamos que essa escolha segue as recomendações, o limiar escolhido nem é muito baixo e por outro lado deixou máximos suficientes para a análise.

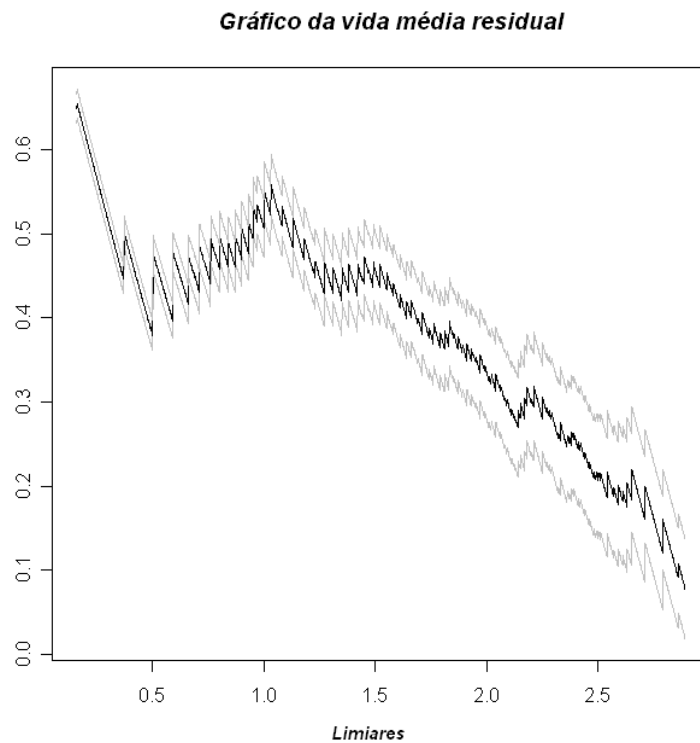
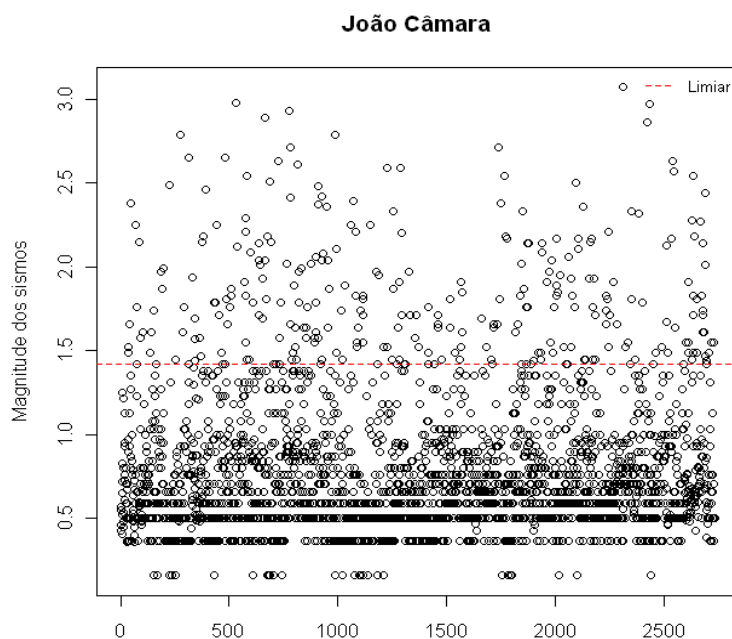


Figura 5: Representação gráfica da vida média residual da variável aleatória sismos no município de Câmara – uma ferramenta para a seleção do limiar de valores extremos.



Número de sismos monitorados continuamente no período de 23/05/1987 a 07/07/1988

Figura 6: Representação gráfica da dispersão temporal dos sismos no município de Câmara. A linha vermelha representa o limiar selecionado.

Como o parâmetro de forma define o tipo de distribuição, na tabela 1, vemos que a distribuição sugerida para modelar os sismos é a Pareto comum ou Beta e os métodos que se obtiveram melhor desempenho, foi o da máxima entropia e o da máxima verossimilhança, pois os mesmos obtiveram o menor erro padrão.

Método	Estimativa			Erro Padrão	
	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$	\hat{u}	$\hat{\xi}$	$\hat{\sigma}$
POME	-0,2998	0,4564	1,4340	0,0506	0,0455
MLE	-0,2892	0,5820	1,4340	0,0555	0,0466
MPLE	-0,2892	0,5820	1,4340	0,0555	0,0466
PICKANDS	-0,4899	0,5496	1,8070	0,9124	0,8260
MOM	-0,2163	0,4427	1,8070	0,0864	0,0522
PWMB	-0,1737	0,4272	1,8070	0,1049	0,0554
PWMU	-0,1682	0,4252	1,8070	0,10455	0,0551
MDPD	-0,2766	0,4660	1,8070	0,3589	0,3245
MED	-0,2356	0,5127	1,8070	0,2583	,3015
MGF	-0,2163	0,4427	1,8070	0,0864	0,0522

Tabela 1: Estimativa dos parâmetros da distribuição generalizada de Pareto, através dos métodos de estimação propostos bem como o erro padrão, dos parâmetros de forma e escala.

Nas figuras 7 e 8 tem-se uma visão geral do ajuste da GPD, pelos princípios da máxima entropia e o da máxima verossimilhança, respectivamente, os gráficos PP-plot e o QQ-Plot, mostram que os dados dão indícios de um bom ajuste, pelos respectivos métodos, uma vez que os mesmos apresentam um comportamento linear. Na mesma figura o gráfico da densidade indica um bom ajuste do método pelos dois princípios, uma vez que as duas curvas a teórica e a empírica ficam bem próximas. De acordo com o gráfico que mede o nível de retorno, tanto pelo POME como pelo MLE, espera-se que a cada dez dias ocorra um sismo de $1,5^{\circ}$, que em geral não é sentido pela população, porem um sismo de $2,0^{\circ}$, que já pode ser sentido pela comunidade espera-se que ocorra a cada cinqüenta dias. Por fim, para o sismo mais intenso ocorrido na região o de $5,2^{\circ}$ espera-se que ocorra a cada dez milhões e oitocentos mil dias (aproximadamente 300 anos), que devido à escala não aparece no gráfico, mas foi calculado no R, pelo pacote utilizado para a análise.

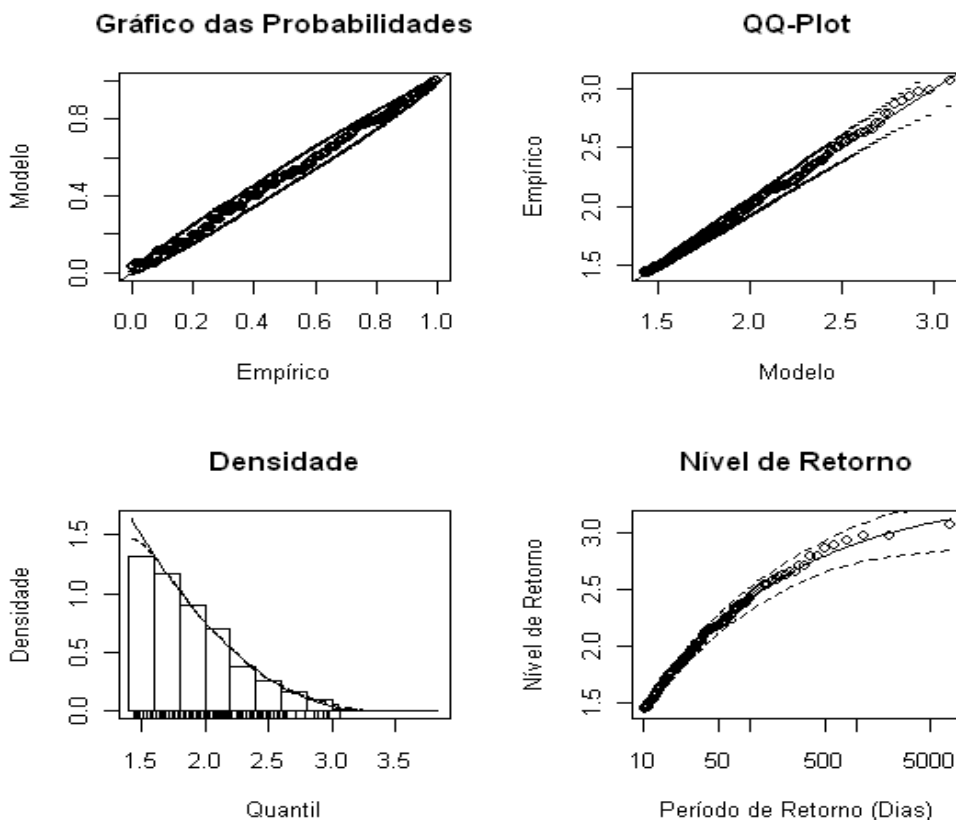


Figura 7: Ajuste dos sismos de João Câmara via distribuição generalizada de Pareto pelo método da Máxima Entropia(POME).

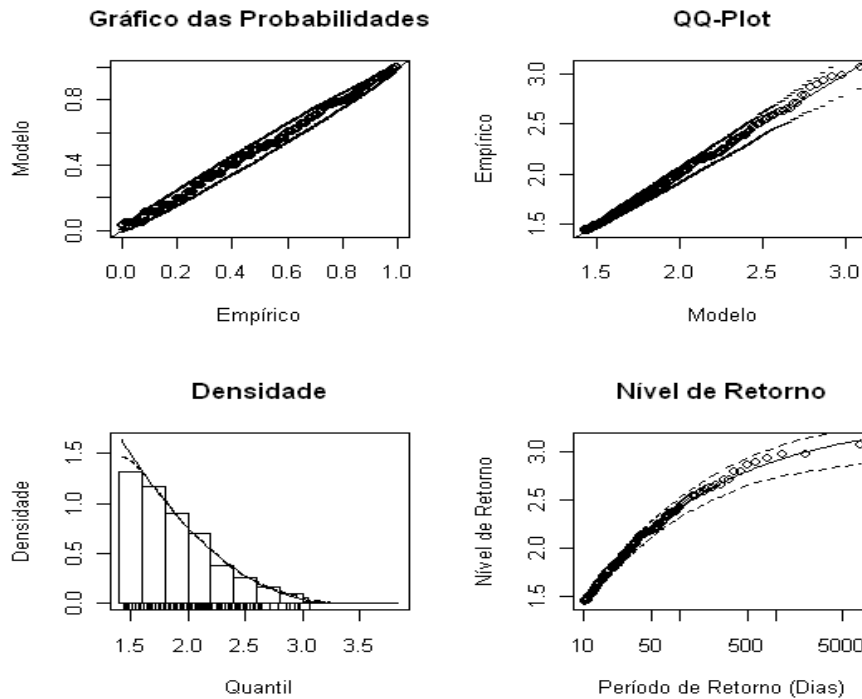


Figura 8: Ajuste dos sismos de João Câmara via distribuição generalizada de Pareto pelo método da Máxima Verossimilhança (MLE).

4 - Referências Bibliográficas

- [1] Bautista, E. A. L. A. (2002). *Distribuição Generalizada de Valores Extremos no Estudo da Velocidade Máxima do Vento em Piracicaba, SP*. Piracicaba -SP: ESALQ, Tese (Doutorado em Agronomia) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, p.47.
- [2] Brabson, B.B. e Palutikof, J.P. (2000). "Tests of the Generalized Pareto Distribution for predicting extreme wind speeds." *Journal of Applied Meteorology*, p.39 .
- [3] Coles S. (2001). *Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*, Springer.
- [4] Gnedenko, B.V. (1943). *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aléatoire*. *Annales des Mathématiques*, p.423-453.
- [5] Fisher, R.A., Tippett, L.H.C. (1928). *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample*. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, p.180-190.
- [6] Hosking, J. and Wallis, J. (1987). 'Parameter and quantile estimation for the generalized Pareto distribution', *Technometrics* , p. 339-349.

- [7] Jenkinson, A. F. (1955). *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) of meteorological elements*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, London, p.158-171.
- [8] Nonato, R. C. S. (2008). *Caracterização Estatística de Extremos de Processos Sísmicos via Distribuição Generalizada de Pareto. Estudo de caso: João Câmara – RN*, Natal-RN: PPGMAE, Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Estatística), p.21.
- [9] Oztekin, T. (2004). *Comparison of Parameter Estimation Methods for the Three-Parameter Generalized Pareto Distribution*, University of Gaziosmanpaşa, Faculty of Agriculture, Agriculture Technology, Tokat – TURKEY.
- [10] Singh, V. P. e H. Guo (1995). *Parameter estimation for 3-parameter generalized pareto distribution by the principle of maximum entropy (POME)*, Department of Civil Engineering, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, USA.