A distribuição Weibull-Poisson

Estela Maris P. Bereta - DEs/UFSCar
Francisco Louzada-Neto - DEs/UFSCar
Maria Aparecida de Paiva Franco - DEs/UFSCar

Resumo

Neste trabalho é proposta uma distribuição de probabilidade com três parâmetros que pode ser usada na modelagem da distribuição do tempo até a ocorrência de uma falha no contexto de riscos competitivos. É considerada a duração de um sistema em série de um número N aleatório de componentes, de forma que, dado o valor de N=n, a duração latente dos N componentes, $(T_1, \cdots, T_n)$ é uma amostra aleatória de tamanho n de uma determinada distribuição de tempo de duração. Por ter estrutura em série, a duração do sistema, dado que o valor de N é n , é a variável aleatória $Y_n = \min(T_1, \cdots, T_n)$. Considera-se o caso em que tanto o número de componentes como a identificação do componente que provocou a falha do sistema não são observáveis mas apenas $Y_N = \min(T_1, \cdots, T_N)$ é observável. A distribuição de probabilidade de N que foi considerada neste trabalho é a distribuição de Poisson truncada em zero com parâmetro α. Considera-se que o tempo latente T_j de duração de qualquer componente do sistema tem distribuição de Weibull de parâmetros β e γ. São deduzidas as expressões em forma fechada da função de sobrevivência, da função densidade de probabilidade, da função de risco e da função quantil da variável Y. São também deduzidas as expressões da função de verossimilhança de uma amostra de tamanho n de Y e dos componentes da matriz de informação de Fisher observada.

Palavras-chave: função de risco; riscos competitivos; misturas de distribuições; Weibull-Poisson.

1 Introdução

Muitos autores têm proposto novas funções densidades de probabilidade para modelagem do tempo de duração de vários componentes (ou de tempo até a morte de um indivíduo sujeito a vários riscos competitivos de morte). A busca por distribuições novas é justificada pelo fato de que modelos mais tradicionais como os da distribuição Weibull, lognormal, gama, muitas vezes não se ajustam bem ao conjunto de dados reais sob a análise de um pesquisador. Neste sentido, no campo de confiabilidade e de sobrevivência humana, contribuições diversas visando obter funções de risco em forma de “banheira”, que justificariam a existência de um período inicial de alto risco têm sido feitas (Hjorth, 1980).

Mais recentemente, extensões das distribuições mais conhecidas para variáveis aleatórias não negativas visam levar em conta uma estrutura latente, com um número aleatório de diferents causas de falha competindo entre si na determinação da falha.

Cordeiro, Morais e Souza (2008) introduzem a uma extensão da distribuição exponencial-geométrica porposta por Adamidis e Loukas (1998), que denominaram distribuição Weibull-geométrica.

Neste trabalho, introduz-se a distribuição Weibull-Poisson, que generaliza a distribuição exponencial-Poisson. Estudos preliminares mostram que sua função de risco pode ser unimodal.

2 A distribuição Weibull-Poisson (WP)

Seja $\{Y_i\}_{i=1}^{N}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com distribuição Weibull $W(\beta,\gamma)$ com parâmetro de escala $\beta > 0$ e parâmetro de forma $\gamma > 0$ e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(y,\beta,\gamma) = \gamma\beta^{\gamma}y^{\gamma-1}e^{-(\beta y)^{\gamma}},\ y > 0. \tag{1}$$

Seja N uma variável aleatória discreta com distribuição de Poisson de parâmetro $\alpha > 0$, truncada em zero. A função densidade de probabilidade ($f_N(n)$) e a função geradora de probabilidades ($G_N(t)$) de N são dadas em (2).

$$\begin{aligned} f_N(n) &= \frac{\alpha^n}{n!(e^{\alpha}-1)},\ n = 1,2,3,\cdots,\ \text{e}\ \alpha > 0 \\ G_N(t) &= \frac{e^{\alpha t}-1}{e^{\alpha}-1},\ \alpha > 0\ \text{e}\ -\infty < t < \infty \end{aligned} \tag{2}$$

Teorema 1 *A função densidade do Mínimo de N variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas Weibull(*β,γ*) quando N é independente da sequência de variá-*

veis $\{Y_i\}$ e tem a distribuição de Poisson de parâmetro (α) é dada por:

$$f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^{\gamma}}-(\beta t)^{\gamma}}\alpha(\beta)^{\gamma}(t)^{\gamma-1}\gamma}{e^{\alpha}-1},\ t>0 \tag{3}$$

A distribuição de probabilidade correspondente à função dada pela expressão (3) é denominada neste trabalho Distribuição de Weibull_Poisson (WP).
A prova deste teorema se baseia no fato de que a função de sobrevivência $S_{Y_n}(t)$ de $Y_n = \min(T_1,\cdots,T_n)$, quando cada variável T_j, $j=1\cdots n$ tem a distribuição de Weibull $(\beta;\gamma)$ é dada por (4)

$$S_{Y_n}(t)=\left(e^{-(\beta t)^{\gamma}}\right)^{n}=e^{(-n^{1/\gamma}\beta t)^{\gamma}} \tag{4}$$

De (4) decorre que a distribuição de probabilidade de Y_n é uma Weibull$(n^{\frac{1}{\gamma}}\beta,\gamma)$ e que sua função densidade de probabilidade $S_{Y_n}(t)$ é dada por (5).

$$f_{Y_n}(t)=\frac{\gamma\left(\beta n^{1/\gamma}\right)^{\gamma}(t)^{\gamma-1}e^{-(\beta n^{1/\gamma}t)^{\gamma}}}{n!} \tag{5}$$

A função densidade de Y_N , indicada por $f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma)$ é obtida pelo processo de mistura sobre o parâmetro n da densidade Weibull $(\beta n^{1/\gamma},\gamma)$ através de uma Poisson (α) truncada em zero:

$$f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{e^{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n}\gamma\left(\beta n^{1/\gamma}\right)^{\gamma}(t)^{\gamma-1}e^{-(\beta n^{1/\gamma}t)^{\gamma}}}{n!} \tag{6}$$

Fazendo $j=n-1$ na expressão acima, obtém-se (7):

$$f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{e^{\alpha}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^{j+1}\gamma\left(\beta(j+1)^{1/\gamma}\right)^{\gamma}(t)^{\gamma-1}e^{-(\beta(j+1)^{1/\gamma}t)^{\gamma}}}{(j+1)!} \tag{7}$$

Simplificando (7) obtém-se (8):

$$\begin{aligned}f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{1}{e^{\alpha}-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^{j+1}\gamma t^{\gamma-1}e^{-(j+1)(\beta t)^{\gamma}}}{j!}\\ &= \frac{1}{e^{\alpha}-1}\gamma t^{\gamma-1}\alpha e{-}(\beta t)^{\gamma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha^{j}e^{-j(\beta t)^{\gamma}}}{j!} \qquad (8)\end{aligned}$$

Mas,

$$e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-(\beta t)^\gamma})^j}{j!} \tag{9}$$

Logo, substituindo (9) em (8) obtém-se

$$f_{\min}(t;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma} - (\beta t)^\gamma} \alpha(\beta)^\gamma (t)^{\gamma-1}\gamma}{e^\alpha - 1}, \ t > 0 \tag{10}$$

Observação: A expressão (6) será utilizada posteriormente no desenvolvimento do trabalho.

3 Função distribuição, função de risco e distribuição da i-ésima estatística de ordem de WP

Seja T uma variável aleatória com distribuição WP com parâmetros α, β e γ e representada por $WP(\alpha,\beta,\gamma)$. A função distribuição acumulada, a função de sobrevivência e função de risco do mínimo de N v.a. iid $\{Y_i\}_{i=1}^N$, com N Poisson(α) são dadas por:

$$F_{\min}(t) = \frac{(e^\alpha - e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}})}{e^\alpha - 1}, \ t > 0,$$

$$S_{\min}(t) = \frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} - 1}{e^\alpha - 1}, \ t > 0,$$

$$h_{\min}(t) = \frac{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma} - (\beta t)^\gamma} \gamma\alpha\beta^\gamma t^{\gamma-1}}{e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma}} - 1}, \ t > 0.$$

Sejam $T_1, \cdots, T_n$ variáveis aleatórias iid $T_i \sim WP(\alpha,\beta,\gamma)$ para $i = 1, 2, \cdots, n$. A função densidade da i-ésima estatística de ordem, $T_{i:n}$ para $t > 0$ é dada por:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(t) &= \binom{n-1}{i-1} \frac{n e^{\alpha e^{-(\beta t)^\gamma} - (\beta t)^\gamma} \alpha(\beta)^\gamma (t)^{\gamma-1}\gamma}{e^\alpha - 1} \\ &\times \left\{ \frac{e^\alpha - e^{\alpha e^{(\beta t)^\gamma}}}{e^\alpha - 1} \right\}^{i-1} \left\{ \frac{e^{\alpha e^{(\beta t)^\gamma}} - 1}{e^\alpha - 1} \right\}^{n-i} \end{aligned} \tag{11}$$

Para fim de comparação, a função densidade da i-ésima estatística de ordem de uma Weibull (β,γ) é dada por:

$$f_{i:n}(t) = \binom{n-1}{i-1} \frac{\gamma \beta^{\gamma} t^{\gamma-1} e^{-(n-i+1)(\beta t)^{\gamma}} \left\{1 - e^{(\beta t)^{\gamma}}\right\}^{i-1}}{e^{\alpha} - 1}$$

3.1 Quantis e momentos da distribuição Weibull-Poisson

O r-ésimo momento da distribuição Weibull-Poisson é dado por:

$$\begin{aligned} E(t^r) &= \int_0^{\infty} t^r \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j \gamma \left(\beta j^{1/\gamma}\right)^{\gamma} (t)^{\gamma-1} e^{-(\beta j^{1/\gamma} t)^{\gamma}}}{j!} dt \\ &= \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_0^{\infty} t^r \gamma \left(\beta j^{1/\gamma}\right)^{\gamma} (t)^{\gamma-1} e^{-(\beta j^{1/\gamma} t)^{\gamma}} dt \\ &= \frac{\gamma}{e^{\alpha} - 1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \underbrace{\int_0^{\infty} t^r g\left(t, \beta j^{1/\gamma}, \gamma\right) dt}_{\text{r-ésimo momento de Weibull}} \end{aligned} \tag{12}$$

Na expressão (12), o r-ésimo momento ($m(r)$) de uma Weibull $g\left(t, \beta j^{1/\gamma}, \gamma\right)$ é definido por:

$$m(r) = \left(\beta j^{1/\gamma}\right)^{-r} \Gamma(1 + \frac{r}{\gamma}).$$

Então,

$$\begin{aligned} E(t^r) &= \frac{\gamma}{e^{\alpha} - 1} \Gamma(1 + \frac{r}{\gamma}) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \left(\beta j^{1/\gamma}\right)^{-r} \\ &= \frac{\gamma}{e^{\alpha} - 1} \Gamma(1 + \frac{r}{\gamma}) \beta^{-r} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-r/\gamma} \frac{\alpha^j}{j!}. \end{aligned}$$

4 Estimação dos parâmetros

Assumindo que uma amostra de n tempos de vida com distribuição Weibull Poisson seja observada, as estimativas de máxima verossimilhança do vetor de parâmetros $\theta =$

(α, β, γ) são obtidas pela maximização da função de log-verossimilhança dada por:

$$
\begin{aligned}
l(\theta, t) &= \alpha \sum_{i=1}^{n} e^{-(\beta t_i)^\gamma} - \sum_{i=1}^{n} (\beta t_i)^\gamma + n \log \alpha + n\gamma \log \beta \\
&+ \gamma \sum_{i=1}^{n} \log t_i - \sum_{i=1}^{n} \log t_i + n \log \gamma - \log(e^{-\alpha} - 1).
\end{aligned}
$$

As estimativas por máxima verossimilhança de $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$ podem ser obtidas usando a rotina nlminb do R (R development Core Team, 2008). A vantagem deste procedimento é que com os pacotes estatísticos existentes ele pode ser executado rapidamente. Estimativas das variâncias dos estimadores dos parâmetros podem ser obtidas por reamostragem.

5 Conclusão

O trabalho está em fase de conclusão. Está sendo feito o estudo por bootstrap da estimação da probabilidade de cobertura dos Intervalos de Confiança construídos para os parâmetros, a partir de suas estimativas por máxima verossimilhança. Uma aplicação a dados reais está sendo também pesquisada.

Referências

[1] ADAMIDIS K., LOUKAS, S., 1998. A lifetime distribution with decreasing failure rate. *Statist. And Probab. Lett.*, 39, 35-42.

[2] CORDEIRO.G.M., MORAIS, A. L., SOUZA, W.B., 2008. The Weibull-Geometric Distribution. *Journal of Statistical Computation & Simulation* Vol. 00, No. 00, 1-14.

[3] HJORTH, U., 1980. A reliability distribution with increasing, decreasing, constant and bathtub - shaped failure rates. *Technometrics*, vol. 22, pp. 99-107.