

PRUEBAS DE RACHAS RECORTADAS PARA SIMETRÍA.

TRIMMED RUNS TESTS FOR SYMMETRY.

J. GIOVANY BABATIVA^a, JIMMY A. CORZO^b

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE
COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD NACIONAL DE
COLOMBIA, BOGOTÁ, COLOMBIA

Resumen

Combinando la teoría de rachas desarrollada por Corzo (1989) y la idea de Modarres & Gastwirth (1996) que utiliza el número de rachas que quedan después de recortar la sucesión dicotomizada se proponen tres familias de estadísticas basadas rachas y tres pruebas para la hipótesis de simetría. Utilizando la técnica de linealización de Taylor se aproxima el valor esperado y la varianza de dos de las familias de estadísticas que se proponen, y se realiza un estudio de aproximación de la distribución de las estadísticas por la distribución normal. Las pruebas propuestas son comparadas en términos de su potencia con algunas de las pruebas no paramétricas más recientes y comunes para dicho problema en tamaños de muestra $n = 10(1)25$, $n = 30$, $n = 50(50)250$ y $n = 500$. Para la comparación se utilizaron métodos de Monte Carlo y las muestras fueron generadas de nueve distribuciones obtenidas desde la familia lambda generalizada. Las simulaciones indican que para una gran variedad de alternativas asimétricas las pruebas propuestas son más potentes que las pruebas existentes en la literatura.

Palabras clave: Pruebas de rachas; Pruebas para simetría; Distribución lambda generalizada; potencia.

Abstract

Combining the runs theory developed by Corzo (1989) and the idea of Modarres and Gastwirth (1996), which uses the number of runs over after cutting the dichotomized succession three families of statistics based on runs and three tests for the hypothesis of symmetry are proposed. Using the linearization Taylor's technique approximates the expected value and variance of two from the three proposed families; a study to approximate the distribution of the statistics through the normal distribution for the studied sample sizes

^aMagister en Estadística. E-mail: jgbabatavam@unal.edu.co

^bProfesor asociado al Departamento de Estadística. E-mail: jacorzos@unal.edu.co

is realized. The proposed tests are compared in terms of their power with some other recent and common nonparametric tests for Symmetry, for the sample sizes $n = 10(1)25$, $n = 30$, $n = 50(50)250$ and $n = 500$. For comparison were used Monte Carlo methods and the samples were generated from nine distributions obtained from the generalized lambda distribution. The simulations indicate that, for a wide variety of asymmetric alternatives in the generalized lambda distribution, the tests proposed are more powerful than the existing tests in the literature.

Key words: Runs test; Test of symmetry; Generalized lambda family; Power.

1. Introducción

Sea X_1, \dots, X_n una muestra aleatoria de una función de distribución continua F con función de densidad f con mediana conocida, la cual sin pérdida de generalidad se puede asumir igual a cero. Considere el problema de testear el siguiente sistema de hipótesis:

$$H_0 : F_X(x) = 1 - F_X(-x)$$

frente a la alternativa:

$$K_1 : F_X(x) \neq 1 - F_X(-x).$$

Que indica que la función de distribución F es simétrica alrededor de cero; en otras palabras, en interés se centra en probar si $f(x) = f(-x)$ para todo x .

Son varias las pruebas que se han propuesto para este problema bajo el supuesto de que se conoce alguna medida de localización. Lehmann (1975), Hollander & Wolfe (1973) y Randles & Wolfe (1979) son algunos de los autores que mencionan las pruebas basadas en rangos más conocidas para juzgar la hipótesis de simetría de una distribución. En los últimos 20 años, varios investigadores han propuesto estadísticas para determinar si la distribución muestreada es simétrica alrededor de un centro conocido. Algunos de ellos son Cohen & Menjoge (1988), McWilliams (1990), Castillo (1993), Modarres & Gastwirth (1996), Rojas (1999) y Baklizi (2003) quienes han propuesto estadísticas basadas en rachas; por otra parte, Tajuddin (1994) utiliza una estadística basada en rangos; Cheng & Balakrishnan (2004) utilizan la información de los signos, Mira (1999) usa la medida de sesgo de Bonferroni (1933); mientras que Modarres & Gastwirth (1998) y Thas et al. (2005) usan información mixta combinando los signos y los rangos.

En la siguiente sección, presentamos tres estadísticas basadas en rachas, el procedimiento combina la teoría desarrollada por Corzo (1989) y la idea de Modarres & Gastwirth (1996) de utilizar como criterio de información de la estadística únicamente el número de rachas que quedan después de hacer un recorte en la sucesión dicotomizada; bajo la hipótesis nula de simetría, se dan aproximaciones del valor esperado y de la varianza de dos estadísticas utilizando la técnica de linealización

de Taylor. En la sección 3, se presenta un estudio de Monte Carlo que muestra que las pruebas propuestas son más potentes que las pruebas de la literatura con las que se realizó la comparación y por ende más potentes que las pruebas con las que los demás autores habían hecho sus comparaciones.

2. Estadísticas propuestas

Sean $|X|_{(1)}, \dots, |X|_{(n)}$ la sucesión de los valores absolutos ordenados. Definimos $|X_{D_j}| = |X|_{(j)}$ ($j = 1, \dots, n$), donde D_j es el antirango de $|X|_{(j)}$; esto es, D_j es el subíndice que tenía originalmente $|X|_{(j)}$ en la sucesión de valores absolutos $|X_1|, \dots, |X_n|$. La sucesión η_1, \dots, η_n se denomina la sucesión dicotomizada y en ella se representan las observaciones positivas por unos y las negativas por ceros, de la siguiente manera:

$$\eta_j = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_j} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad j = 1, \dots, n.$$

Para contar el número de cambios que hay en la sucesión dicotomizada se define la siguiente indicadora:

$$I_1 = 1,$$

$$I_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta_{j-1} \neq \eta_j \\ 0 & \text{si } \eta_{j-1} = \eta_j \end{cases} \quad j = 2, \dots, n.$$

A partir de éstas se calcula el número de rachas hasta la j -ésima observación en la sucesión dicotomizada, así:

$$r_j = \sum_{k=1}^j I_k, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n.$$

A la sucesión r_1, \dots, r_n se le denominará la sucesión de rachas. La estadística que cuenta el número de rachas en la sucesión dicotomizada es:

$$R^+ = r_n = 1 + \sum_{k=2}^n I_k,$$

bajo la hipótesis alterna, muchas observaciones negativas o muchas observaciones positivas tienden a generar agrupaciones y resultaran pocas rachas, esto significa que la hipótesis nula será rechazada para valores pequeños de R^+ . Bajo H_0 , la distribución exacta de R^+ , dada en McWilliams (1990), es binomial con parámetros $n - 1$ y $1/2$.

Como lo menciona Modarres & Gastwirth (1996), "bajo la hipótesis nula la $P(I_k = 1) = P(I_k = 0) = 1/2$, mientras que bajo la alternativa la $P(I_k = 1) \neq P(I_k = 0)$ y depende de k , para $k = 2, \dots, n$. Esto sugiere que una prueba basada

en la posición relativa, k , de las rachas podría ser más potente que R^+ . Teniendo en cuenta que, para alternativas sesgadas las rachas deberían aparecer en las colas se propone modificar la prueba R^+ dando un mayor peso a éstas rachas."

Entonces, siguiendo la metodología propuesta por Corzo (1989) y tomando la idea de recortar observaciones de la muestra presentada por Modarres & Gastwirth (1996, 1998) se proponen las siguientes tres estadísticas de prueba:

$$R_p = \frac{1}{r_n} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i \quad (1)$$

$$R_p^* = \frac{1}{r_n^*} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i \quad (2)$$

$$C_p^* = \frac{1}{r_n} \sum_{i=[np]+1}^n \phi(r_i, i) \delta_i^* \quad (3)$$

donde

$$\phi(r_i, i) = \begin{cases} r_i - pr_n & \text{si } i > np \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ -1 & \text{si } X_{D_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\delta_i^* = \begin{cases} 1/n_1^* & \text{si } X_{D_i} > 0 \\ -1/n_0^* & \text{si } X_{D_i} < 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

p es una proporción de recorte; $[np]$ es la parte entera de np ; n_0^* y n_1^* son el número de ceros y el número de unos en la sucesión dicotomizada después de hacer el recorte; r_n es el número total de rachas en la sucesión dicotomizada mientras que r_n^* es el número total de rachas después de recortar la sucesión dicotomizada. En el caso de las estadísticas R_p y R_p^* , si $p = 0$ se obtiene la estadística estudiada por Castillo (1993); y en el caso de la estadística C_p^* , si $p = 0$ se obtiene la estadística estudiada por Rojas (1999).

Los argumentos para la construcción de la región crítica son los mismos que los utilizados por McWilliams (1990). Suponga que la hipótesis nula de simetría es cierta, entonces para $b > a \geq 0$ se cumple que $P(a < X < b) = P(-b < X < -a)$, luego en la sucesión dicotomizada $P(\eta = 0) = P(\eta = 1)$, lo cual equivale a que $P(X_{D_j} > 0) = P(X_{D_j} < 0) = 1/2$ con lo que se espera que se alternen los valores positivos y negativos de los sumandos de cualquiera de las estadísticas propuestas, haciendo tomen valores cercanos a cero. Bajo la hipótesis alternativa de asimetría la $P(a < X < b) \neq P(-b < X < -a)$ por tanto se espera que en las colas se obtengan agrupamientos de unos o de ceros y como consecuencia de esto los valores de las estadísticas R_p , R_p^* y C_p^* estarán lejos de cero, estando así en favor de la

hipótesis alterna.

Del análisis anterior y teniendo en cuenta que bajo H_0 la distribución de R_p es simétrica alrededor de cero (Babativa (2008)) se concluye que la prueba rechaza la hipótesis nula de simetría en favor de la alternativa de asimetría cuando $|R_p| \geq r_{1-\alpha/2}$, donde $r_{1-\alpha/2}$ corresponde al $100(1-\alpha/2)$ -ésimo percentil de la distribución de la estadística R_p . Las regiones críticas para las pruebas basadas en R_p^* y C_p^* se construyen de manera análoga.

Para calcular la distribución exacta de R_p , R_p^* o C_p^* en un tamaño de muestra n , se calculan los 2^n arreglos distinguibles de unos y ceros; así quedan consideradas todas las posibilidades de la sucesión dicotomizada, a partir de estos se calculan los valores de las estadísticas y posteriormente se halla la distribución de frecuencias de las estadísticas.

A continuación se enuncian dos teoremas que fueron demostrados utilizando la técnica de linealización de Taylor, ver demostraciones en Babativa (2008).

Teorema 1. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución continua y simétrica F con función de densidad f y mediana cero, entonces:

$$\mathbb{E}(R_p) \doteq 0$$

y

$$\mathbb{E}(R_p^*) \doteq 0$$

Teorema 2. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución continua y simétrica F con función de densidad f y mediana cero; p un número real en el intervalo $(0, 1)$; r_n el total de rachas en la sucesión dicotomizada; $\phi(r_i, i)$ y δ_i como se definieron en (1) entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{AV}(R_p) = & \frac{1}{3(n+1)^2} \{n(n^2 + 3n + 2) - [np]([np]^2 + 3[np] - 4) \\ & + 3p^2(n-1)(n^2 - n[np] + 4) \\ & - 3p(n^3 + n^2 + 2n - n[np]^2 - n[np] + 4[np]) + 6\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{AV}(R_p^*) = & \frac{1}{3(n-[np]+1)^2} \{n(n^2 + 3n + 2) - [np]([np]^2 + 3[np] - 4) \\ & + 3p^2(n-1)(n^2 - n[np] + 4) \\ & - 3p(n^3 + n^2 + 2n - n[np]^2 - n[np] + 4[np]) + 6\} \end{aligned}$$

3. Estudio de Monte Carlo

En esta sección se presentan los resultados de una simulación por métodos de Monte Carlo donde se compara la potencia de las pruebas propuestas frente a otras

ocho pruebas de la literatura. Las pruebas con las que se realizó la comparación son:

1. La prueba del rango signado de Wilcoxon referenciada para hipótesis de simetría por Gibbons & Chakraborti (2006):

$$W = \sum_{k=1}^n k\eta_k$$

2. La prueba propuesta por McWilliams (1990). Esta prueba está basada en la estadística:

$$R^+ = \sum_{k=1}^n I_k$$

3. La prueba de Tajuddin (1994), basada en la prueba de Wilcoxon para dos muestras comúnmente utilizada para el problema de localización:

$$W_n = \sum_{k=1}^n k\eta_k = \sum_{k=1}^{n_1} R_k$$

4. La estadística M_p propuesta por Modarres & Gastwirth (1996):

$$M_p = \sum_{k=[np]+2}^n \varphi(k)I_k$$

donde

$$\varphi(k) = \begin{cases} k - np & \text{si } k > np \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

5. La prueba híbrida de dos etapas propuesta por Modarres & Gastwirth (1998), la cual usa en la primera etapa la prueba del signo y en la segunda etapa una modificación de la prueba de Tajuddin (1994): Etapa I:

$$Z_s = \frac{S - n/2}{\sqrt{n/4}}$$

Etapa II:

$$W_p = \sum_{k=[np]+1}^n \varphi(k)\eta_k$$

6. La estadística de Mira (1999), detecta la asimetría de una función de distribución con media μ_F y mediana $\tilde{\mu}_F$ desconocidas usando la medida de sesgo de Bonferroni (1933). Si \bar{X}_n y \hat{X}_n son la media y la mediana de una muestra de tamaño n ; la estadística es:

$$\gamma_1(F_n) = 2 \left(\bar{X}_n - \hat{X}_n \right)$$

7. Baklizi (2003) propone la prueba de rachas condicionando por la cantidad de unos y de ceros en la sucesión dicotomizada. La distribución de probabilidad condicional de R^+ dado n_1 y n_0 , está dada en Gibbons & Chakraborti (1992, pág. 72) y corresponde a:

$$f_{R^+}(r_n/n_0, n_1) = \begin{cases} \frac{2 \binom{n_1-1}{r_n/2-1} \binom{n_0-1}{r_n/2-1}}{\binom{n_1+n_0}{n_1}} & \text{si } r_n > 1 \text{ y par} \\ \frac{\binom{n_1-1}{(r_n-1)/2} \binom{n_0-1}{(r_n-3)/2} + \binom{n_1-1}{(r_n-3)/2} \binom{n_0-1}{(r_n-1)/2}}{\binom{n_1+n_0}{n_1}} & \text{si } r_n > 1 \text{ e impar} \end{cases}$$

Si $n_1 = 0$ o $n_0 = 0$ entonces $P(r_n = 1) = 1$.

8. La prueba propuesta por Cheng & Balakrishnan (2004) que usa la información de los signos. La estadística corresponde a una modificación de la prueba del signo, primero se construye la sucesión de valores absolutos ordenados y con ello se construye la sucesión dicotomizada, la estadística propuesta es:

$$C_6 = \eta_{n-5} + \dots + \eta_n, \quad (4)$$

Se seleccionaron nueve casos de la **DLG**¹ que son los más utilizados en la literatura, ver por ejemplo: McWilliams (1990), Tajuddin (1994), Modarres & Gastwirth (1996, 1998), Baklizi (2003), Cheng & Balakrishnan (2004) y Thas et. al. (2005). Uno de los nueve casos es la aproximación de la distribución normal (caso simétrico) para el cual la hipótesis nula es verdadera y otros ocho casos que varían en su grado de asimetría y permiten comparar la potencia de las pruebas.

Las nueve funciones de densidad de la **DLG** seleccionadas se pueden apreciar en la figura 1 y los valores de sus parámetros en la tabla 1.

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	α_3	α_4
1 (Nula)	0,000000	0,197454	0,134915	0,134915	0,0000	3,0000
2	0,000000	-0,351663	-0,130000	-0,160000	0,8000	11,4000
3	0,000000	-1,000000	-0,100000	-0,180000	2,0000	21,2000
4	0,000000	0,043060	0,025213	0,094029	0,9000	4,2000
5	0,000000	-1,000000	-0,007500	-0,030000	1,5000	7,5000
6	0,000000	1,000000	1,400000	0,250000	0,5000	2,2000
7	0,000000	1,000000	0,000070	0,100000	1,5000	5,8000
8	0,000000	-1,000000	-0,001000	-0,130000	3,1600	23,8000
9	0,000000	-1,000000	-0,000100	-0,170000	3,8800	40,7000

TABLA 1: Valores de los parámetros de la **DLG** de los nueve casos seleccionados para el estudio de potencia.

Para estimar la potencia de las diferentes pruebas se realizó un programa en *SAS IML*. El algoritmo utilizado es el siguiente:

¹El ordenamiento de los casos difiere de los utilizados por otros autores, debido a que en este trabajo se ordenaron por el coeficiente de asimetría.

1. Seleccionar una muestra aleatoria u_1, \dots, u_n de tamaño n de la distribución $U(0, 1)$.
2. Transformar la muestra u_1, \dots, u_n en la sucesión x_1^*, \dots, x_n^* ; utilizando la función percentil de la **DLG**, que se define por:

$$x_i^* = \lambda_1 + \frac{u_i^{\lambda_3} - (1 - u_i)^{\lambda_4}}{\lambda_2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

con lo que se consigue que la sucesión x_1^*, \dots, x_n^* sea una muestra aleatoria de una **DLG** con parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4 .

3. Transformar $x_i = x_i^* - \theta$ para que la distribución de x_1^*, \dots, x_n^* tenga mediana cero, donde

$$\theta = \lambda_1 + \frac{0.5^{\lambda_3} - 0.5^{\lambda_4}}{\lambda_2}. \quad (6)$$

4. Calcular los valores de las estadísticas que se van a comparar usando los valores de la muestra x_1, \dots, x_n .
5. Realizar la prueba de hipótesis utilizando las estadísticas que se van a comparar y para cada una determinar si se rechaza la hipótesis nula aleatorizando la prueba².
6. Aplicar el anterior proceso m veces y estimar la potencia de cada una de las pruebas, así:

$$\hat{\pi} = \frac{\text{Número de rechazos en las } m \text{ réplicas}}{m}$$

Para este trabajo se estimó la potencia de todas las pruebas usando $m = 25000$ réplicas. El máximo número de réplicas usado en los artículos consultados para este trabajo fue de 10000 en Thas et. al (2005) y en Cheng & Balakrishnan (2004).

²Para ver el procedimiento de aleatorización se puede consultar Babativa (2005, pág 50).

4. Conclusiones

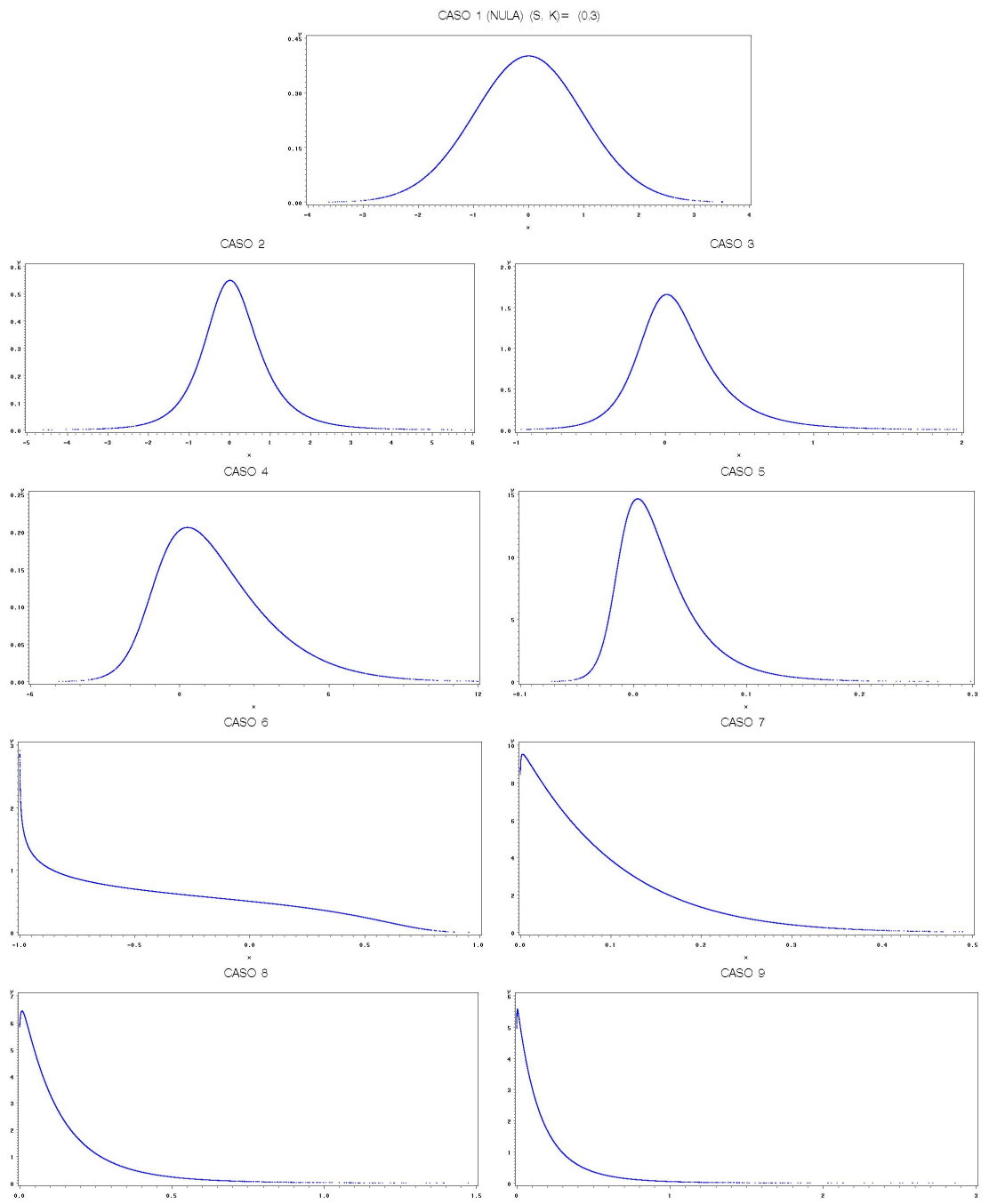
4.1. Estudio de potencia para $n \leq 25$

Para $n < 30$ las pruebas T y W_p no fueron incluidas porque están basadas en estadísticas condicionadas al número de unos y ceros en la sucesión dicotomizada, esto hace que se requieran unos cálculos distintos a los hechos en este trabajo para llegar a la distribución exacta de las mismas, lo cual implicaría programas con otros algoritmos. Por ejemplo, para calcular la distribución exacta de las estadísticas propuestas para un tamaño de muestra $n = 15$ es necesario generar 2^{15} arreglos de unos y ceros, mientras que para las estadísticas T y W_p es necesario generar $\binom{n}{k}$ arreglos para $k = 0, 1, \dots, 7$; lo que genera muchos más cálculos que no estaban planeados desde el comienzo. Para $n \geq 30$ se utilizó la distribución asintótica de las estadísticas.

Por otra parte, las pruebas de Butler (1969), Rothman & Woodroffe (1972) y Hill & Rao (1977) fueron superadas ampliamente por la prueba propuesta por McWilliams (1990) por lo que no fueron tenidas en cuenta en este trabajo.

En las tablas 2 a 10 se presentan los resultados del estudio de Monte Carlo. A partir de éstas se extraen las siguientes conclusiones:

- Bajo la hipótesis nula, caso 1 (tabla 2) el tamaño de todas las pruebas está alrededor del nivel de significancia $\alpha = 0.05$ a excepción de la prueba $\gamma_1(F_n)$ de Mira (1999) que resultó ser una prueba conservativa, para la cual se observó que el error de tipo I aún no alcanzaba el 0.05 para $n = 500$. Por lo anterior, dicha prueba no fue incluida en las comparaciones de las potencias.
- Para el caso 2 (tabla 3) ninguna prueba supera ampliamente a las demás. Sin embargo, la prueba $C_{.20}^*$ en general tiene las mayores potencias. Por ejemplo, para $n = 19$ las tres pruebas con las potencias más altas son $C_{.20}^*$, $C_{.10}^*$ y R^+ con el 0.056, 0.055 y 0.055 respectivamente.
- En el caso 3 (tabla 4) la prueba $C_{.20}^*$ es la que tiene las mayores potencias para $n \leq 20$ y para los demás tamaños de muestra estudiados las pruebas $R_{.80}$, $R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ son las que tienen ventajas, es decir, en este caso las pruebas propuestas resultan más potentes que todas las pruebas con las que se comparó.
- Con muestras provenientes del caso 4 (tabla 5) nuevamente la prueba $C_{.20}^*$ es la que tiene las mayores potencias cuando $n < 20$, para $n = 20$ la prueba $R_{.80}^*$ es la que obtiene el mejor resultado y desde $n = 21$ hasta $n = 25$ las mayores potencias las tienen las pruebas $R_{.80}$, $R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$. Por ejemplo, para $n = 21$ la potencia de las pruebas $R_{.80}$, $R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ está alrededor del 0.15 seguidas por $C_{.20}^*$ con el 0.13 y posteriormente por $M_{.25}$ con el 0.12. Es decir que para este caso las pruebas propuestas resultan más potentes que las pruebas consultadas en la literatura.
- Para el caso 5 (tabla 6) la prueba $C_{.20}^*$ es la que tiene las mayores potencias cuando $n < 17$, para $n = 17$ la prueba $M_{.25}$ logra ligeras ventajas sobre las



demás pruebas, mientras que para $18 \leq n \leq 20$ la prueba con las mayores potencias es $R_{.80}^*$ y para los demás tamaños de muestra (hasta $n = 25$) las pruebas $R_{.80}$, $R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ son las más potentes. Reafirmando que las pruebas propuestas son las que tienen las mayores potencias en los tamaños de muestra estudiados, logrando para $n = 25$ grandes diferencias con respecto a las competidoras de la literatura; $R_{.80}^*$ es la mejor prueba de las propuestas en el tamaño de muestra mencionado con una potencia del 0.27 mientras que la mejor prueba de las competidoras es C_6 (Cheng & Balakrishnan (2004)) con una potencia del 0.23.

→ En el caso 6 (tabla 7) las pruebas con el mejor desempeño para $n \leq 21$ son M_p , $p = 0, 0.1, 0.2$ y 0.25 . Con $n = 22$ las pruebas $R_{.80}$ y $C_{.80}^*$ tienen potencias del 0.39 y 0.38 respectivamente alcanzando a estar en segundo y tercer lugar después de $M_{.25}$ que tiene una potencia del 0.39. Si $n = 24$ o $n = 25$ las pruebas $R_{.80}$, $R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ son las que logran las mayores potencias.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	4,97	5,08	4,71	4,92	5,13	4,90	4,94	4,90	5,09	4,89	4,95	5,04	5,18	5,00	5,06	4,85
$R_{.80}$	4,99	5,02	4,95	4,93	5,08	5,01	5,06	4,95	4,95	4,87	4,94	5,10	5,02	4,96	4,97	5,06
$C_{.10}^*$	5,14	5,12	5,17	4,78	5,05	5,30	5,10	5,18	4,97	4,88	5,20	4,97	5,23	5,02	5,06	4,98
$C_{.20}^*$	5,24	5,15	5,31	4,94	4,84	4,94	5,18	4,90	5,00	4,86	4,98	5,07	5,21	5,00	5,20	5,06
$C_{.60}^*$	5,05	5,00	4,70	4,94	5,07	5,11	5,24	4,93	4,91	4,99	4,96	5,04	4,98	5,04	5,30	5,09
$C_{.80}^*$	5,03	4,96	5,04	4,91	5,06	4,94	5,01	4,94	4,94	4,92	4,92	5,14	5,04	4,96	4,96	5,07
$R_{.60}^*$	4,90	5,12	4,72	4,94	4,84	5,18	5,08	5,33	5,11	4,72	4,86	5,09	5,05	5,08	4,91	5,06
$R_{.80}^*$	5,03	5,12	4,97	4,99	4,91	5,10	5,00	4,84	4,97	4,84	4,81	5,10	5,07	5,03	5,04	5,04
W	5,05	5,25	4,83	4,84	5,28	5,23	4,86	4,90	5,01	4,81	4,95	4,94	5,05	5,08	5,21	4,66
R^+	5,09	4,97	4,90	4,79	5,01	4,95	4,96	4,88	5,11	4,93	5,07	5,12	5,02	4,99	5,08	5,08
R	5,25	4,99	4,91	4,88	4,86	4,98	5,01	5,06	5,17	4,95	5,11	5,09	5,01	5,09	5,00	5,26
C_6	4,93	5,22	4,85	4,97	4,99	5,21	5,02	4,81	5,06	4,79	4,88	5,13	4,98	5,03	5,08	5,07
M_0	5,15	5,01	4,77	4,68	4,93	5,12	4,96	4,85	5,06	5,03	5,05	4,93	5,08	4,95	4,81	5,00
$M_{.10}$	5,13	5,04	4,76	4,78	4,94	5,31	5,03	4,88	5,05	5,07	5,08	5,00	5,08	4,87	5,00	5,00
$M_{.20}$	5,00	5,10	4,81	4,76	5,02	5,23	5,05	4,72	5,12	5,04	5,17	5,10	4,92	4,80	4,78	5,28
$M_{.25}$	4,99	5,10	4,82	4,88	5,04	5,23	5,14	4,76	5,10	5,06	5,09	5,24	5,06	4,91	4,97	5,20
$\gamma_1(F_n)$	0,25	4,70	1,21	2,65	0,54	4,54	1,87	2,67	0,90	4,10	2,09	2,48	3,22	3,67	2,04	2,14

TABLA 2: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 1.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	5,12	5,30	5,29	5,10	5,23	5,05	5,36	5,22	5,17	5,33	5,15	5,65	5,33	5,87	5,26	5,57
$R_{.80}$	5,15	5,16	5,08	5,23	5,26	5,27	5,25	5,30	5,32	5,26	5,41	5,65	5,47	5,89	5,54	5,91
$C_{.10}^*$	5,34	5,33	6,01	4,98	4,99	5,34	5,39	5,25	5,34	5,50	5,52	5,46	5,60	5,88	5,35	5,81
$C_{.20}^*$	5,37	5,78	5,78	5,17	5,37	5,52	5,42	5,36	5,69	5,61	5,57	5,57	5,60	5,93	5,55	5,75
$C_{.60}^*$	5,22	5,30	5,28	5,14	5,13	5,21	5,47	5,17	5,39	5,24	5,27	5,41	5,19	5,48	5,73	5,55
$C_{.80}^*$	5,08	5,27	5,19	5,08	5,17	5,17	5,23	5,24	5,29	5,24	5,40	5,64	5,43	5,87	5,53	5,93
$R_{.60}^*$	5,06	5,35	5,32	5,08	5,10	5,23	5,23	5,78	5,34	5,14	5,18	5,66	5,18	5,66	5,32	5,47
$R_{.80}^*$	5,12	5,41	5,13	5,00	5,00	5,21	5,25	5,30	5,27	5,17	5,59	5,72	5,32	5,96	5,56	5,88
W	5,00	5,05	5,03	5,09	4,97	5,05	5,29	4,78	4,96	5,26	5,12	5,33	5,07	5,13	5,11	5,01
R^+	5,24	5,44	5,29	5,03	5,18	5,22	5,18	5,31	5,28	5,46	5,21	5,13	5,20	5,17	5,11	5,28
R	5,37	5,50	5,28	5,12	5,23	5,17	5,15	5,34	5,35	5,36	5,25	5,17	5,16	5,18	5,24	5,30
C_6	5,07	5,18	5,18	5,07	5,24	5,19	5,26	5,26	5,24	5,34	5,29	5,56	5,23	5,68	5,43	5,61
M_0	5,30	5,46	5,33	5,16	5,29	5,19	5,31	5,19	5,25	5,36	5,29	5,37	5,47	5,51	5,22	5,29
$M_{.10}$	5,21	5,38	5,33	5,13	5,37	5,17	5,42	5,24	5,23	5,41	5,26	5,40	5,44	5,39	5,31	5,26
$M_{.20}$	5,16	5,35	5,38	5,02	5,47	5,15	5,53	5,25	5,25	5,33	5,35	5,45	5,32	5,38	5,07	5,40
$M_{.25}$	5,18	5,35	5,36	5,18	5,50	5,14	5,55	5,27	5,24	5,25	5,40	5,53	5,34	5,58	5,29	5,32

TABLA 3: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 2.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	5,69	5,89	6,09	5,96	6,28	6,46	6,74	7,77	7,52	8,09	8,08	8,19	9,00	8,62	9,54	9,81
$R_{.80}$	5,55	5,96	6,18	6,32	6,43	6,60	7,25	7,62	7,76	8,14	8,13	9,14	9,93	9,98	10,72	11,22
$C^*_{.10}$	6,29	6,84	7,94	6,96	7,22	7,45	7,65	7,59	7,42	7,86	8,32	8,40	9,00	8,84	9,23	9,40
$C^*_{.20}$	6,27	6,82	7,58	6,96	7,39	7,86	7,82	8,05	8,07	8,69	8,87	8,78	9,53	9,81	10,07	10,49
$C^*_{.60}$	5,90	6,04	6,21	5,84	6,63	6,65	6,88	7,21	7,54	7,36	7,24	7,92	7,24	8,23	8,68	8,68
$C^*_{.80}$	5,70	5,31	5,23	5,58	5,86	6,26	6,84	7,41	7,58	7,98	8,05	9,01	9,82	9,95	10,67	11,20
$R^*_{.60}$	5,48	5,76	6,02	6,16	6,24	6,82	6,64	8,24	7,16	7,57	7,25	7,90	8,45	8,43	8,91	8,81
$R^*_{.80}$	5,57	5,85	6,52	6,38	6,45	6,78	7,13	7,71	7,90	8,36	8,28	9,04	9,95	9,93	10,51	11,09
W	5,21	5,41	5,45	5,20	5,03	5,31	5,43	5,46	5,34	5,58	5,32	5,42	5,71	5,50	5,74	5,47
R^+	5,75	6,08	6,10	6,18	6,35	6,27	6,05	6,76	6,52	6,98	6,79	6,86	6,95	7,21	7,15	7,28
R	6,06	6,26	6,32	6,52	6,59	6,57	6,36	6,81	6,78	7,17	7,05	7,17	7,20	7,46	7,37	7,57
C_6	5,28	5,51	5,61	5,84	6,14	6,14	6,38	7,17	7,00	7,60	7,69	8,19	8,83	8,97	9,61	9,78
M_0	5,95	6,46	6,66	6,79	6,84	6,93	6,86	7,55	7,28	7,68	7,54	8,01	8,15	8,39	8,15	8,48
$M_{.10}$	5,86	6,39	6,54	6,71	6,88	7,01	6,89	7,68	7,44	7,68	7,67	8,14	8,22	8,39	8,45	8,62
$M_{.20}$	5,76	6,24	6,72	6,72	6,88	7,00	6,95	7,76	7,57	7,65	7,67	8,38	8,16	8,36	8,23	9,04
$M_{.25}$	5,70	6,24	6,72	6,90	6,93	7,04	6,95	7,78	7,61	7,65	7,66	8,11	8,36	8,70	8,60	8,95

TABLA 4: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 3.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	6,51	6,67	7,00	7,48	8,36	9,22	9,48	10,82	11,12	11,82	13,30	12,54	13,31	14,24	14,56	15,60
$R_{.80}$	6,19	7,08	7,53	7,92	8,24	8,58	9,66	10,68	10,97	12,11	12,72	14,71	15,89	16,90	18,02	19,08
$C^*_{.10}$	7,49	7,98	9,94	8,94	9,17	9,64	9,51	10,64	10,49	10,89	12,08	12,39	12,89	13,13	13,53	14,38
$C^*_{.20}$	7,46	9,13	9,42	9,50	9,57	10,55	10,64	11,60	11,76	12,58	13,31	13,35	13,71	14,12	14,60	16,25
$C^*_{.60}$	6,92	7,05	7,29	7,28	8,33	9,41	9,05	9,41	10,53	10,46	9,97	11,08	10,41	11,88	13,30	13,16
$C^*_{.80}$	6,48	5,54	5,64	6,48	7,17	7,78	9,01	10,19	10,52	11,79	12,54	14,46	15,68	16,76	17,96	19,05
$R^*_{.60}$	6,17	6,74	6,67	7,65	8,23	9,34	9,30	11,08	9,99	10,68	11,50	11,51	12,24	13,02	13,34	14,00
$R^*_{.80}$	6,43	6,90	7,53	7,93	8,43	8,88	9,79	11,14	11,38	12,47	13,69	14,41	15,57	16,81	18,03	19,15
W	5,58	5,47	5,13	5,69	5,48	5,87	5,69	6,19	6,01	5,78	6,24	6,48	6,10	6,47	6,40	6,44
R^+	6,73	6,88	7,08	7,74	8,27	8,30	8,17	8,70	8,79	9,31	9,17	9,36	9,50	9,71	10,12	10,27
R	7,53	7,49	7,79	8,16	8,53	8,84	8,69	9,29	9,30	9,55	9,73	9,85	10,00	10,16	10,19	10,83
C_6	5,40	5,75	6,00	6,61	7,12	8,00	8,30	9,33	9,84	10,66	11,81	12,44	13,25	14,42	15,42	16,38
M_0	7,08	7,88	8,17	8,69	9,13	9,57	9,74	10,59	10,58	11,04	11,52	11,37	12,39	12,65	12,60	13,16
$M_{.10}$	6,99	7,89	8,07	8,81	9,20	9,93	9,83	10,77	10,83	11,41	11,73	11,80	12,59	12,83	13,28	13,44
$M_{.20}$	6,57	7,77	8,27	8,87	9,35	10,14	10,34	11,16	11,10	11,64	12,00	12,24	12,72	12,94	13,29	14,22
$M_{.25}$	6,47	7,77	8,44	9,20	9,58	10,29	10,35	11,32	11,30	11,78	12,20	12,67	13,06	13,61	13,84	14,34

TABLA 5: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 4.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	7,37	7,38	8,57	9,34	10,34	11,36	12,50	14,04	14,74	15,82	17,39	16,96	18,59	18,91	19,96	21,88
$R_{.80}$	6,51	7,93	8,46	9,06	9,30	9,85	12,41	13,34	14,12	15,07	15,87	20,14	22,01	22,68	24,52	26,35
$C^*_{.10}$	8,90	9,96	12,02	10,96	11,56	11,84	12,37	12,65	13,43	13,78	15,62	16,13	16,93	17,05	17,65	18,70
$C^*_{.20}$	8,67	10,96	11,78	11,65	12,21	13,05	13,72	14,20	14,68	15,47	17,00	17,69	18,49	18,62	19,26	21,38
$C^*_{.60}$	7,84	8,04	8,93	9,00	10,20	11,24	11,58	11,56	12,38	12,76	13,14	13,98	13,41	14,44	15,79	16,38
$C^*_{.80}$	7,21	5,90	6,14	7,05	7,89	8,68	11,15	12,39	13,45	14,58	15,63	19,64	21,70	22,50	24,40	26,30
$R^*_{.60}$	7,07	7,29	8,03	9,40	9,82	11,27	12,00	14,19	13,25	13,76	14,72	15,33	16,70	16,92	17,68	19,41
$R^*_{.80}$	6,68	7,87	8,28	9,25	9,43	10,24	12,60	14,00	15,08	16,35	17,86	19,68	21,83	22,63	24,73	26,79
W	5,63	5,61	5,86	6,01	5,81	6,21	6,16	6,48	6,72	6,61	6,73	6,86	7,36	7,18	7,15	7,26
R^+	7,54	7,95	8,22	9,11	9,80	9,72	9,86	10,34	10,42	10,97	11,43	11,54	11,80	12,19	12,52	13,23
R	8,63	8,76	9,25	9,98	10,12	10,74	10,80	11,09	11,13	11,48	12,28	12,24	12,65	12,84	12,97	14,09
C_6	5,91	6,22	6,89	7,69	8,47	9,22	10,36	11,92	12,91	14,08	15,60	16,77	18,32	19,32	21,06	22,95
M_0	8,53	9,13	9,84	10,87	11,20	11,93	12,56	13,37	13,55	14,02	14,86	15,16	16,28	16,56	16,66	17,67
$M_{.10}$	8,60	9,24	9,85	11,15	11,49	12,32	12,72	13,72	13,87	14,39	15,19	15,62	16,76	16,66	17,45	18,15
$M_{.20}$	8,09	9,12	10,29	11,16	11,72	12,74	13,20	14,22	14,39	14,73	15,60	16,46	16,94	16,98	17,66	19,14
$M_{.25}$	7,90	9,12	10,42	11,57	11,98	13,02	13,19	14,52	14,87	15,05	15,84	16,53	17,37	17,77	18,49	19,28

TABLA 6: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 5.

→ Para los casos 7 a 9 (tablas 8 a 10) donde la asimetría es evidente, la prueba $M_{.25}$ siempre tiene las potencias más altas. Sin embargo, para n cerca de 25 las diferencias con las pruebas $R_{.80}$, $R^*_{.80}$ y $C^*_{.80}$ no es grande. Por ejemplo, en el caso 9 para $n = 25$ la mayor potencia la tiene $M_{.25}$ con el 0.76 mientras que las pruebas $R^*_{.80}$, $R_{.80}$ y $C^*_{.80}$ tienen potencias del 0.71, 0.70 y 0.69 respectivamente, estando por encima de pruebas como R (Baklizi (2003)), R^+

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	8,54	8,96	10,60	12,18	13,24	17,64	17,56	20,18	22,11	24,75	26,91	24,36	26,42	28,06	30,56	32,80
$R_{.80}$	7,55	10,26	11,01	11,59	12,40	13,24	18,40	20,24	21,71	23,37	24,82	35,50	38,63	41,83	45,08	47,86
$C^*_{.10}$	10,22	11,25	13,52	12,66	13,05	13,13	13,70	14,76	14,94	15,70	17,10	17,91	17,86	18,82	19,43	19,59
$C^*_{.20}$	9,84	13,39	14,10	13,88	14,16	14,52	15,04	16,05	16,52	17,54	18,93	19,50	19,82	20,52	21,55	22,90
$C^*_{.60}$	9,54	10,27	11,44	11,90	14,12	16,65	15,37	15,36	17,43	17,38	16,97	16,89	16,03	17,21	19,90	19,40
$C^*_{.80}$	7,36	6,88	7,34	8,87	10,28	11,47	16,81	18,91	20,78	22,78	24,40	34,98	38,29	41,62	44,93	47,73
$R^*_{.60}$	7,62	8,72	9,73	12,04	14,10	17,05	17,59	21,49	20,80	22,79	25,15	24,96	27,83	28,47	30,26	34,01
$R^*_{.80}$	7,43	9,38	10,41	11,32	12,43	13,04	18,35	20,88	23,22	26,28	28,18	33,88	37,65	40,99	44,68	48,33
W	5,55	5,83	5,99	6,15	6,53	6,32	6,55	6,74	6,94	7,70	7,50	7,54	7,73	7,83	7,90	8,09
R^+	9,57	10,83	11,66	13,09	14,73	14,94	16,18	17,28	18,11	19,71	20,26	21,79	22,35	23,72	25,23	26,04
R	11,72	12,48	13,31	14,65	15,66	17,02	18,05	18,75	19,71	20,62	22,30	23,47	23,87	25,40	26,36	28,12
C_6	5,87	6,78	7,58	8,76	10,37	12,34	14,59	17,02	19,64	23,02	25,82	28,90	32,32	35,99	39,69	43,48
M_0	10,43	12,83	14,66	16,64	18,76	20,48	23,03	24,95	26,73	28,70	31,09	33,14	35,08	37,23	39,08	41,18
$M_{.10}$	10,23	12,82	14,64	17,04	19,39	21,21	23,74	25,66	27,62	29,84	32,42	34,46	36,42	38,50	41,13	43,01
$M_{.20}$	9,25	12,54	15,09	17,26	19,64	21,96	24,93	27,03	28,74	31,08	34,13	36,63	37,66	39,80	42,34	45,72
$M_{.25}$	8,94	12,54	15,34	17,75	20,18	22,60	25,12	27,53	29,43	31,83	34,77	36,64	39,01	41,56	44,19	46,41

TABLA 7: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 6.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	11,88	12,97	16,30	20,02	22,22	29,00	28,84	32,34	35,09	39,28	42,24	38,90	41,85	43,84	47,20	51,37
$R_{.80}$	8,40	12,59	13,35	14,26	14,89	15,58	24,48	26,43	27,84	29,68	30,74	50,59	53,90	56,30	59,48	62,27
$C^*_{.10}$	14,65	15,77	20,19	18,62	19,00	19,83	20,26	21,55	22,73	23,95	25,70	27,35	28,04	28,49	28,95	30,82
$C^*_{.20}$	13,92	20,67	21,33	20,46	20,75	21,61	21,77	23,68	24,85	26,99	27,86	29,47	30,21	31,26	32,00	34,43
$C^*_{.60}$	13,78	15,37	17,79	18,77	22,29	27,29	23,98	24,39	25,73	26,45	26,24	24,25	23,04	23,14	28,00	26,78
$C^*_{.80}$	7,70	7,20	7,47	9,40	11,45	13,27	21,55	23,99	26,40	28,73	30,18	49,40	53,32	55,90	59,28	62,11
$R_{.60}$	10,01	11,62	14,15	17,93	21,70	26,19	27,23	32,68	32,17	34,84	37,97	39,40	43,17	44,00	45,85	51,54
$R_{.80}$	7,94	10,93	11,98	13,41	13,68	14,17	25,36	28,34	30,25	33,51	35,43	48,92	53,81	56,24	59,33	64,70
W	5,80	6,67	7,00	7,49	7,47	8,05	8,36	8,26	8,71	9,41	9,51	10,01	10,32	10,41	11,16	11,06
R^+	13,86	15,53	17,18	19,08	21,87	22,43	24,27	25,77	27,15	30,04	30,02	32,82	33,75	35,09	37,97	38,51
R	17,44	18,12	19,90	21,98	23,28	25,62	26,91	28,15	29,94	31,55	32,81	35,16	35,87	37,73	39,48	41,35
C_6	7,11	9,00	11,21	13,56	16,58	20,38	24,00	28,15	32,40	37,38	41,16	46,34	50,85	54,36	58,89	63,70
M_0	16,60	19,82	22,89	25,57	28,65	31,81	34,98	37,56	40,28	43,54	45,83	48,32	51,94	53,27	55,79	58,48
$M_{.10}$	16,52	20,09	23,23	26,29	29,64	32,61	36,04	38,95	41,71	45,19	47,70	50,06	53,64	54,74	58,18	60,50
$M_{.20}$	14,52	20,10	24,35	27,01	30,44	33,67	37,71	40,72	43,19	46,59	49,61	52,51	55,18	56,26	59,67	63,30
$M_{.25}$	13,89	20,10	24,84	27,97	31,19	34,51	37,82	41,30	44,21	47,50	50,53	53,85	56,64	58,19	61,42	63,97

TABLA 8: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 7.

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	13,42	15,78	19,85	25,38	28,23	35,05	35,44	39,52	43,09	46,60	50,97	46,32	49,69	52,53	56,06	59,59
$R_{.80}$	8,60	13,58	14,48	15,38	15,91	16,62	27,50	29,14	30,70	31,98	33,23	56,51	59,94	62,43	64,90	67,24
$C^*_{.10}$	17,12	17,90	23,20	22,19	22,41	24,08	23,45	25,36	26,87	27,41	30,27	31,55	32,68	33,82	35,07	35,51
$C^*_{.20}$	16,08	24,73	24,72	24,48	24,04	25,56	25,50	27,18	28,77	30,69	33,60	33,68	35,49	36,65	37,70	39,78
$C^*_{.60}$	15,64	18,73	21,77	23,26	27,69	33,36	28,96	29,49	30,83	31,98	32,49	28,21	28,25	27,73	32,71	31,88
$C^*_{.80}$	8,40	7,30	8,34	9,85	11,97	14,01	23,55	26,35	28,89	30,82	32,61	55,20	59,12	62,00	64,60	67,07
$R^*_{.60}$	11,55	13,50	16,32	21,73	25,62	30,86	32,77	39,30	38,96	41,33	45,39	46,17	50,70	52,38	54,01	59,49
$R^*_{.80}$	8,14	11,73	12,55	13,94	13,85	14,20	28,17	31,70	33,02	35,03	36,47	54,73	59,83	62,88	65,47	69,55
W	6,70	7,31	7,77	8,65	9,06	8,71	9,21	9,26	10,48	10,63	10,89	11,28	12,23	12,60	12,70	12,88
R^+	16,21	18,92	20,38	23,17	26,20	27,57	28,75	30,77	33,18	36,23	37,34	38,88	40,39	42,04	45,16	46,06
R	20,24	21,78	23,75	26,48	27,67	31,19	31,68	33,71	36,65	37,52	40,62	41,47	42,92	45,03	46,61	49,14
C_6	8,40	10,62	13,39	17,13	20,87	24,82	29,79	35,04	40,39	44,65	49,72	54,33	59,27	63,66	67,74	71,75
M_0	20,07	24,44	27,93	31,65	34,82	38,66	41,93	45,11	48,82	51,22	54,90	57,09	60,16	61,88	64,23	67,07
$M_{.10}$	20,34	24,99	28,50	32,36	36,11	39,73	43,13	46,33	50,28	52,87	56,72	58,84	61,94	63,68	66,56	69,16
$M_{.20}$	18,24	24,86	29,87	33,30	37,02	40,60	45,04	48,29	51,91	54,53	58,53	61,06	63,59	65,28	68,02	71,83
$M_{.25}$	17,47	24,86	30,51	34,78	37,84	41,61	45,25	49,09	52,89	55,32	59,31	61,94	65,07	66,92	69,74	72,66

TABLA 9: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 8.

(McWilliams (1990)) y W (Wilcoxon) que obtuvieron potencias del 0.53, 0.5 y 0.13 respectivamente.

En general, para los tamaños de muestra estudiados se concluye qué:

$n =$	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$R_{.60}$	14,17	16,32	21,13	27,37	30,50	38,19	37,74	41,54	44,73	49,18	53,39	48,45	51,35	54,73	59,11	61,72
$R_{.80}$	8,70	13,99	14,85	15,68	16,34	16,86	28,29	30,00	31,44	32,91	33,99	59,23	61,69	64,46	67,00	68,97
$C_{.10}^*$	18,09	18,39	24,20	23,11	23,97	25,23	24,64	25,89	27,14	28,09	31,00	31,91	33,22	34,68	35,71	36,69
$C_{.20}^*$	16,95	25,35	25,98	25,10	25,39	26,37	26,76	27,56	29,21	31,54	34,26	34,33	35,74	36,74	38,39	40,04
$C_{.60}^*$	16,47	19,53	23,03	24,75	29,84	36,08	31,59	31,92	33,08	33,85	34,03	29,92	29,86	29,96	34,90	32,86
$C_{.80}^*$	8,52	7,26	8,45	9,77	12,11	14,15	24,43	27,20	29,50	31,65	33,28	57,79	60,92	63,98	66,75	68,84
$R_{.60}^*$	11,90	14,21	17,74	22,84	27,68	33,55	34,33	40,97	40,36	43,56	48,27	49,56	53,11	54,88	57,40	62,00
$R_{.80}^*$	8,34	12,38	13,28	13,97	13,64	13,74	28,31	32,16	34,84	36,62	37,48	56,80	61,31	64,09	66,75	70,99
W	6,69	7,47	7,83	8,78	9,02	9,06	9,71	9,82	10,78	10,93	11,61	11,92	12,02	12,77	13,29	12,98
R^+	17,60	19,47	21,54	23,95	28,21	29,51	31,56	33,42	35,49	39,15	39,57	42,24	43,67	45,94	49,23	49,55
R	21,99	22,59	25,10	27,71	29,88	33,19	34,62	36,30	39,07	40,62	42,90	44,86	46,24	49,15	50,81	52,62
C_6	8,67	11,12	14,33	18,07	22,63	27,31	31,94	36,87	42,20	47,74	52,58	57,93	62,06	66,67	70,99	74,49
M_0	21,65	25,43	29,54	32,94	37,58	41,58	45,30	48,85	51,53	55,25	57,86	60,80	64,18	66,74	69,11	71,41
$M_{.10}$	21,98	26,13	30,25	33,91	38,83	42,94	46,61	50,35	53,23	56,98	59,78	62,76	65,84	68,38	71,42	73,36
$M_{.20}$	19,68	26,27	31,75	35,06	39,88	44,30	48,26	52,30	54,88	58,57	61,92	65,04	67,56	69,88	73,05	75,94
$M_{.25}$	18,85	26,27	32,50	36,57	40,72	45,28	48,72	53,01	56,21	59,46	62,79	66,70	68,83	71,63	74,47	76,46

TABLA 10: Estimación de la potencia para las pruebas comparadas usando el caso 9.

- ⇒ En los casos 2, 3, 4 y 5 de la **DLG** y para $n < 20$ la potencia basada en la estadística $C_{.20}^*$ es mayor que la potencia de las pruebas basadas en las estadísticas M_p, R, R^+, C_6 y W .
- ⇒ En los casos 2 al 6 y para $n > 20$ se observa que la potencia basada en las estadísticas $R_{.80}, R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ es mayor que la potencia de las pruebas basadas en las estadísticas M_p, R, R^+, C_6 y W consultadas en la literatura.
- ⇒ Para los casos 7 al 9 las potencias de las pruebas propuestas $R_{.80}, R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ son mayores que las potencias de las pruebas R (Baklizi (2003)), R^+ (McWilliams (1990)) y W (Wilcoxon), y se mantienen cerca de las potencias obtenidas por la prueba $M_{.25}$ que fue la que alcanzó los mejores resultados.

Para los casos 7 al 9 de la **DLG** donde las pruebas $C_{.20}^*, R_{.80}, R_{.80}^*$ y $C_{.80}^*$ no tiene las mayores potencias (aunque están por encima de pruebas reconocidas) es más fácil, por su forma distribucional, hacer un análisis descriptivo y detectar la asimetría. Es decir, que la asimetría se puede detectar de forma sencilla para los casos donde las pruebas propuestas no tienen su mejor desempeño y que para los casos donde se requiere de una prueba estadística la mayor potencia es obtenida por las pruebas propuestas.

Por otro lado, a partir del comportamiento observado para $n > 20$ donde la potencia de las pruebas propuestas con una proporción de recorte del 0.80 se incrementa considerablemente en la medida que n crece, se piensa que para $n > 25$ la potencia de una prueba basada en éstas estadísticas será mejor. Para examinar si se mantiene esta tendencia se calcularon las potencias de las pruebas basadas en las estadísticas R_p, R_p^* y C_p^* con $p = 0.6$ y 0.8 ; además se agregaron las pruebas T y W_p propuestas por Tajuddin (1994) y Modarres & Gastwirth (1998) respectivamente.

4.2. Estudio de potencia para $n = 30, 50, 100, 150, 200, 250$ y 500

Con base en las tablas 11 a 17 se concluye que:

- Las pruebas basadas en las estadísticas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ tienen las mayores potencias en vecindades de la hipótesis nula. Lo que permite conjeturar que las pruebas propuestas son localmente más potentes.
- Para $n \geq 30$, como se sospechaba, la potencia de las pruebas basadas en las estadísticas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ mejoró para los casos 7 al 9; tanto así que para $n = 30$ resultan ser las pruebas con el mejor desempeño en cualquiera de los casos de la **DLG** seleccionados, es decir, que la potencia de las pruebas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ es siempre mayor que la potencia de todas sus competidoras en el tamaño de muestra mencionado.
- Para tamaños de muestra $n \geq 150$ las pruebas basadas en la estadística C_p^* no fueron incluidas porque su desempeño desmejoró frente a las pruebas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$, sin que necesariamente la potencia de la prueba $C_{.80}^*$ estuviera por debajo de algunas de las competidoras.
- La prueba W , referenciada para la hipótesis de simetría por Gibbons & Chakraborti (2006), es la que tiene el desempeño más bajo de todas las pruebas que se compararon.
- Existen grandes diferencias entre las potencias de las pruebas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ con respecto a algunas de sus competidoras. Por ejemplo, para $n = 200$ con muestras provenientes del caso 4, la potencia de las pruebas $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ es del 0.983 y 0.979 respectivamente; mientras que las pruebas R^+ , R , T y W tienen potencias de 0.33, 0.34, 0.65 y 0.21 respectivamente; las pruebas basadas en las estadísticas M_0 , $M_{.10}$, $M_{.20}$ y $M_{.25}$ tienen potencias de 0.56, 0.58, 0.61 y 0.62 respectivamente y la potencia de la prueba C_6 es de 0.93. Notándose claramente el dominio de las pruebas propuestas sobre las competidoras mencionadas.
- Se podría decir que las pruebas W_{70} y W_{80} son las competidoras más directas que se tienen, pues siguiendo con el ejemplo de $n = 200$, éstas tuvieron potencias del 0.98 y 0.99 respectivamente. Sin embargo, no existe una diferencia clara entre las pruebas propuestas y éstas, es más, en la tabla 11 (potencia para $n = 30$) se puede observar que las diferencias son mínimas para los casos 1 al 5 donde las potencias de W_{70} son muy similares a las de $R_{.80}$ y $R_{.80}^*$ y que para los demás casos (6 al 9) las pruebas propuestas tienen las mayores potencias. Además recordemos que la prueba W_p está basada en dos estadísticas por ser una prueba híbrida, lo que hace un poco más complicado usarlas.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,13	5,61	10,99	18,47	25,48	36,86	54,93	64,70	66,67
$R_{.80}$	5,19	6,02	13,23	25,65	36,17	71,07	86,86	91,43	93,53
$R^*_{.60}$	4,97	5,46	10,00	16,89	22,86	41,51	59,94	68,57	71,62
$R^*_{.80}$	5,22	5,92	12,87	24,77	34,34	69,57	84,01	88,43	90,20
$C^*_{.60}$	5,21	5,74	9,89	15,91	20,23	21,46	28,25	33,28	34,28
$C^*_{.80}$	5,32	6,49	12,05	21,52	30,08	62,24	80,71	87,08	89,90
R^+	5,16	5,28	7,68	11,49	14,40	30,17	45,30	54,33	57,78
R	5,31	5,33	8,08	12,19	15,48	33,03	48,45	57,37	61,00
W	4,93	5,06	5,98	6,93	7,63	9,04	12,72	15,03	15,69
T	4,68	5,51	9,55	13,91	18,72	23,30	39,10	48,56	50,91
C_6	5,17	5,81	11,64	21,65	30,42	60,96	79,37	85,74	88,43
M_0	5,15	5,54	9,36	15,53	20,89	50,62	68,66	77,15	80,84
$M_{.10}$	5,11	5,53	9,61	15,79	21,55	53,28	71,11	79,01	82,81
$M_{.20}$	4,89	5,21	9,39	15,79	21,62	54,63	72,53	80,18	84,19
$M_{.25}$	4,95	5,27	9,41	16,05	22,17	55,97	73,63	81,06	84,89
$W_{.70}$	4,18	5,31	12,93	25,45	36,45	60,58	82,10	88,18	90,39
$W_{.80}$	3,70	4,81	11,94	24,07	34,03	60,94	74,38	77,77	78,90

TABLA 11: Potencias para los nueve casos de la **DLG** y $n = 30$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4,85	6,54	16,91	31,66	43,87	54,19	75,11	82,54	83,19
$R_{.80}$	4,87	7,07	22,10	45,91	62,68	88,90	97,34	98,77	99,18
$R^*_{.60}$	4,93	6,32	15,54	29,81	41,55	63,69	83,84	89,66	90,72
$R^*_{.80}$	4,87	6,98	20,39	42,24	57,95	91,46	97,84	98,87	99,29
$C^*_{.80}$	4,97	5,96	9,17	16,43	22,39	57,50	81,71	89,38	91,48
R^+	4,86	5,34	8,86	14,48	20,22	49,04	67,22	76,62	81,24
R	5,23	5,64	9,47	15,61	21,66	51,54	69,73	78,76	82,88
W	4,88	5,08	6,81	8,92	10,65	12,22	18,61	23,31	24,23
T	4,76	5,92	12,76	21,72	29,85	37,15	60,23	70,65	73,29
C_6	4,81	6,81	19,89	43,10	59,30	95,13	98,99	99,58	99,73
M_0	4,79	5,54	11,20	21,96	31,13	76,14	90,32	94,75	96,55
$M_{.10}$	4,76	5,67	11,55	22,79	32,42	78,70	91,88	95,82	97,34
$M_{.20}$	4,75	5,84	12,04	23,92	33,99	81,35	93,34	96,77	97,81
$M_{.25}$	4,64	5,68	12,14	24,19	34,49	82,33	93,88	97,09	98,01
$W_{.70}$	4,45	6,66	22,15	46,12	63,67	87,16	97,47	99,06	99,37
$W_{.80}$	4,09	6,33	21,67	48,77	67,02	94,52	99,21	99,77	99,86

TABLA 12: Potencias para los nueve casos de la **DLG** y $n = 50$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5,16	8,40	32,15	58,21	73,70	77,87	93,67	96,49	97,01
$R_{.80}$	5,12	10,53	45,62	80,79	92,40	98,97	99,95	99,99	99,99
$R^*_{.60}$	5,07	8,13	30,60	57,44	74,12	87,81	97,77	99,01	99,29
$R^*_{.80}$	5,06	9,66	41,50	76,86	90,34	99,70	99,99	100,00	100,00
$C^*_{.80}$	4,94	6,58	13,57	22,00	23,60	54,44	85,82	93,50	96,08
R^+	4,73	5,87	11,27	21,28	31,72	78,60	92,96	96,63	98,00
R	4,50	5,58	10,91	20,64	31,36	78,37	92,97	96,54	97,94
W	4,82	5,34	9,19	13,00	16,80	20,46	35,34	42,29	43,99
T	4,84	7,10	21,75	38,32	52,38	63,24	88,32	94,30	95,24
C_6	4,89	8,82	37,15	74,99	88,72	99,98	100,00	100,00	100,00
M_0	4,84	6,47	15,55	35,27	51,37	97,34	99,67	99,94	99,99
$M_{.10}$	4,86	6,51	16,24	36,81	53,56	98,00	99,81	99,97	99,99
$M_{.20}$	4,83	6,66	16,92	38,54	55,62	98,62	99,87	99,98	100,00
$M_{.25}$	4,91	6,63	17,33	39,36	56,72	98,84	99,89	99,99	100,00
$W_{.70}$	5,08	10,31	46,12	79,97	92,77	99,28	99,99	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,99	10,88	49,53	85,63	95,70	99,92	100,00	100,00	100,00

TABLA 13: Potencias para los nueve casos de la **DLG** y $n = 100$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4.82	9.94	45.42	75.58	88.96	88.82	98.24	99.49	99.58
$R_{.80}$	4.77	12.76	62.72	93.84	98.74	99.89	100.00	100.00	100.00
$R_{.60}^*$	4.90	9.89	44.62	76.64	90.21	95.16	99.55	99.88	99.94
$R_{.80}^*$	4.46	11.62	58.39	92.13	98.34	99.99	100.00	100.00	100.00
R^+	4.96	5.82	12.99	28.28	41.34	92.01	98.80	99.53	99.81
R	4.73	5.42	12.43	27.47	40.56	91.80	98.77	99.53	99.81
W	4.86	5.69	11.19	17.18	23.82	28.93	48.31	57.73	60.57
T	5.10	8.01	30.21	53.49	70.29	80.31	97.05	99.09	99.48
C_6	4.64	10.38	47.63	87.75	96.31	100.00	100.00	100.00	100.00
M_0	5.24	6.61	19.53	46.97	67.04	99.76	99.99	100.00	100.00
$M_{.10}$	5.34	6.73	20.40	49.07	69.53	99.85	100.00	100.00	100.00
$M_{.20}$	5.33	6.72	21.26	51.52	71.83	99.93	100.00	100.00	100.00
$M_{.25}$	5.28	6.66	21.74	52.77	73.16	99.95	100.00	100.00	100.00
$W_{.70}$	5.04	12.57	64.02	93.70	98.78	99.97	100.00	100.00	100.00
$W_{.80}$	4.91	13.27	68.15	96.47	99.54	100.00	100.00	100.00	100.00

TABLA 14: Potencias para los nueve casos de la DLG y $n = 150$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5.30	12.46	58.51	87.10	95.86	94.28	99.54	99.91	99.92
$R_{.80}$	5.17	16.05	76.59	98.27	99.83	99.99	100.00	100.00	100.00
$R_{.60}^*$	5.16	11.89	57.42	87.72	96.49	98.07	99.91	99.98	99.99
$R_{.80}^*$	5.15	15.09	73.47	97.94	99.80	100.00	100.00	100.00	100.00
R^+	5.31	6.17	14.79	33.25	50.46	97.08	99.77	99.96	99.99
R	5.52	6.41	15.22	34.12	51.27	97.27	99.80	99.97	99.99
W	5.10	6.09	13.09	21.40	29.85	36.67	60.37	71.11	72.85
T	5.01	9.47	39.36	64.87	82.23	90.16	99.35	99.93	99.94
C_6	5.03	11.85	54.85	93.03	98.34	100.00	100.00	100.00	100.00
M_0	5.20	6.91	22.66	56.14	77.68	99.98	100.00	100.00	100.00
$M_{.10}$	5.12	7.06	23.54	58.38	79.85	99.99	100.00	100.00	100.00
$M_{.20}$	5.05	7.10	24.64	60.96	82.11	100.00	100.00	100.00	100.00
$M_{.25}$	5.08	7.09	25.49	62.50	83.29	100.00	100.00	100.00	100.00
$W_{.70}$	4.86	15.78	77.18	98.03	99.83	100.00	100.00	100.00	100.00
$W_{.80}$	4.89	16.53	80.80	99.12	99.98	100.00	100.00	100.00	100.00

TABLA 15: Potencias para los nueve casos de la DLG y $n = 200$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	5.04	14.08	67.21	92.36	98.23	98.25	99.90	100.00	100.00
$R_{.80}$	4.66	18.85	84.36	99.55	99.96	100.00	100.00	100.00	100.00
$R_{.60}^*$	5.03	13.66	66.93	93.16	98.67	99.20	99.99	100.00	100.00
$R_{.80}^*$	4.71	17.78	82.17	99.39	99.96	100.00	100.00	100.00	100.00
R^+	4.85	6.40	16.59	38.83	57.82	99.07	99.97	100.00	100.00
R	4.72	6.29	16.37	38.48	57.58	99.06	99.97	100.00	100.00
W	5.11	6.43	15.69	25.76	36.41	44.10	70.09	80.04	81.97
T	4.90	10.48	47.40	74.31	89.63	95.42	99.88	99.97	99.99
C_6	4.85	12.78	60.36	95.56	99.14	100.00	100.00	100.00	100.00
M_0	4.96	7.05	26.71	64.76	84.84	100.00	100.00	100.00	100.00
$M_{.10}$	4.92	7.10	28.23	67.27	86.68	100.00	100.00	100.00	100.00
$M_{.20}$	4.97	7.23	29.54	70.07	88.57	100.00	100.00	100.00	100.00
$M_{.25}$	4.97	7.25	30.23	71.46	89.60	100.00	100.00	100.00	100.00
$W_{.70}$	4.75	18.90	85.47	99.47	99.98	100.00	100.00	100.00	100.00
$W_{.80}$	4.66	19.98	88.95	99.88	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00

TABLA 16: Potencias para los nueve casos de la DLG y $n = 250$.

CASO =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$R_{.60}$	4,74	23,81	92,40	99,74	99,99	99,92	100,00	100,00	100,00
$R_{.80}$	4,86	34,09	98,96	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$R^*_{.60}$	4,78	23,60	92,60	99,82	100,00	99,98	100,00	100,00	100,00
$R^*_{.80}$	5,02	32,94	98,76	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
R^+	5,12	6,72	24,41	61,40	83,08	100,00	100,00	100,00	100,00
R	5,10	6,81	24,48	61,70	83,24	100,00	100,00	100,00	100,00
W	4,95	8,00	26,54	46,09	62,11	72,76	93,85	97,56	98,16
T	4,91	16,66	76,19	95,97	99,53	99,90	100,00	100,00	100,00
C_6	4,91	16,39	74,95	99,09	99,93	100,00	100,00	100,00	100,00
M_0	5,25	7,68	41,58	89,33	98,40	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.10}$	5,21	7,73	43,63	91,16	98,85	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.20}$	5,16	7,95	45,78	92,77	99,18	100,00	100,00	100,00	100,00
$M_{.25}$	5,16	8,15	46,91	93,45	99,35	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.70}$	5,06	33,94	99,22	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
$W_{.80}$	4,98	36,41	99,58	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00

TABLA 17: Potencias para los nueve casos de la **DLG** y $n = 500$.

Referencias

- [1] Babativa, G. (2005). “*Una Versión de Rachas de la Prueba de Freund-Ansari para la Alternativa de Escala en dos Muestras de Tamaños Diferentes*”, Trabajo de Grado. Universidad Nacional de Colombia.
- [2] Babativa, G. (2008). “*Propuesta de una Prueba de Rachas Recortada para Hipótesis de Simetría*”, Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.
- [3] Baklizi, A. (2003). “*A Conditional Distribution Runs Test for Symmetry*”, Journal of Nonparametric Statistics, Vol. 15, No. 6, pág 713-718.
- [4] Bonferroni, C. (1933) “*Elementi di Statistica Generale*”, Torino Gili.
- [5] Castillo, O. (1993). “*Una Prueba para Simetría Basada en Rachas*”, Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.
- [6] Cheng, W.H., & Balakrishnan, N. (2004). “*A modified sign test for symmetry*”, Communications in Statistics Simulation and Computation, Vol. 33, pág 703-709.
- [7] Corzo, J. (1989). “*Verallgemeinerte Runttest for Lage-und Skalen-Alternative*”, Tesis Doctoral. Universidad de Dortmund. Alemania.
- [8] Gibbons, J.D. & Chakraborti, S. (2006). “*Nonparametric Statistic Inference, Fourth Edition*” Marcel Dekker, Inc. New York.
- [9] Henze, N. (1993). “*On the Consistency of a Test for Symmetry Based on a Runs Statistic*”, Journal of Nonparametric Statistics, Vol. 3, Pág 195 - 199.
- [10] Hollander M. & Wolfe O. (1973). “*Nonparametrical Statistical Methods*”, Jhon Wiley and Sons Inc., New York.
- [11] Lehmann, E. (1975). “*Nonparametrics: Statistical Methods Based of Ranks*”, San Francisco. Holden day, Inc.
- [12] Mardia K. V., Bookstein F. L. & Moreton I. J. (2000). “*Statistical Assessment of Bilateral Symmetry of Shapes*”, Biometrika, Vol. 87, No. 2, pág 285-300.
- [13] McWilliams, T.P (1990). “*A Distribution-free Test for Symmetry Based on a Runs Statistic*”, Journal of the American Statistical Association, Vol. 85, No. 412, pág 1130-1133.
- [14] Mira, A. (1999). “*Distribution-free Test for Symmetry Based on Bonferroni’s Measure*”, Journal of Applied Statistics, Vol. 26, No. 8, pág 959-972.
- [15] Modarres, R. & Gastwirth, J.L (1996). “*A modified runs test for symmetry*”, Statistics and Probability, Vol. 31, pág 107-112.
- [16] Modarres, R. & Gastwirth, J.L (1998). “*Hybrid test for the hypothesis of symmetry*”, Journal of Applied Statistics, Vol. 25, No. 6, pág 777-783.

- [17] Corzo, J. & Rojas, A.(1999) “ *Estudio de potencia de una prueba de rachas para alternativa de simetría*”, Revista de la Academia Colombiana de Ciencias No. 22, 1999.
- [18] Tajuddin, I.H (1994). “*Distribution-free Test for Symmetry Based on Wilcoxon two-sample test*”, Journal of Applied Statistics, Vol. 21, No. 5,pág 409-414.