

# **Escores Ponderados a partir da Solução HOMALS**

Márcio Luis Moreira de Souza, Ronaldo Rocha Bastos e Marcel de Toledo Vieira

Departamento de Estatística, Instituto de Ciências Exatas,  
Universidade Federal de Juiz de Fora

## **Resumo**

A partir da utilização da análise multivariada de dados, especificamente da Análise de Homogeneidade, conhecida na literatura pela sigla HOMALS, este trabalho propõe uma nova maneira de calcular os escores ponderados a partir de um conjunto de dados categóricos. A técnica de HOMALS, também citada como Análise de Correspondência Múltipla, é bastante abrangente, sendo utilizadas nas mais diversas áreas de conhecimento principalmente por permitir uma rica e detalhada análise gráfica das inter-relações (correspondências) entre um grande contingente de variáveis categóricas. A principal proposta deste trabalho é propor uma metodologia para o cálculo de escores ponderados a partir de um conjunto de dados categóricos considerando a média ponderada dos valores numéricos das categorias às quais o respondente pertence, dadas todas as variáveis analisadas por meio da técnica de HOMALS.

Palavras-chave: análise multivariada; dados categóricos; escore; análise de correspondência.

## **1. Introdução**

A análise multivariada de dados se dá na presença de três ou mais variáveis em que se deseja analisar o efeito conjunto das mesmas para se obter informações generalizadas a respeito de um determinado contexto. Esse tipo de análise considera cada variável como uma dimensão do espaço e teve maior impulso nas últimas décadas, em função do desenvolvimento e aperfeiçoamento das tecnologias computacionais, vista a inviabilidade dessas análises serem conduzidas manualmente (PEREIRA, 1999). Tais técnicas têm como uma de suas principais funções a redução de dimensionalidade, obtida de modo a sintetizar a maior parte da informação disponível, mantendo o tanto quanto possível da variabilidade total dos dados originais.

Análises multivariadas podem ser representadas por imagens geométricas a fim de facilitar a identificação de padrões e associações entre variáveis e observações. A representação gráfica de dados multivariados envolve, sobretudo, o princípio da proximidade geométrica das observações, com a identificação de dimensões abstratas sobre as quais essas observações e as variáveis estudadas possam ser projetadas e analisadas. Quanto maior o número de características similares as observações possuem entre si, mais próximas estas estarão representadas no espaço reduzido em questão (MICHAELIDIS e De LEEUW, 1998).

O principal objetivo deste trabalho é propor uma metodologia para o cálculo de escores ponderados a partir de um conjunto de dados categóricos, buscando: (i) na Seção 2, ressaltar as propriedades matemáticas da técnica de Análise de Homogeneidade, bem como descrever os métodos matemáticos inerentes à mesma; (ii) na Seção 3, apresentar como - por meio da solução HOMALS - é possível criar escores ponderados que sumarizam toda informação disponibilizada pelo conjunto de variáveis categóricas analisado; e (iii) na Seção 4, descrever, principalmente, as utilizações futuras dos escores ponderados em questão.

## **2. Análise de Homogeneidade**

A Análise de Homogeneidade é uma técnica bastante abrangente, pois permite tanto a análise de um conjunto de variáveis categóricas nominais (conhecida na literatura como HOMALS), categóricas ordinais (conhecida na literatura como Análise Não-linear de Componentes Principais ou PRINCALS<sup>1</sup>), numéricas (PCA<sup>2</sup>) ou até mesmo de um conjunto misto de variáveis categóricas e numéricas (GIFI, 1990).

---

<sup>1</sup> *Principal Components by means of Alternating Least Squares*

<sup>2</sup> *Principal Components Analysis*

Em estudos analisando variáveis categóricas nominais, a técnica de HOMALS apresenta grande abrangência, sendo aplicada nos mais diversos campos, tais como genética (SHABROVA et al., 2004), microbiologia (BECERRA et al., 2002), psicologia (LAUTSCH e THÖLE, 2003), educação (WILLIAMS e LAWSON, 2004), ecologia (LOMOLINO e SMITH, 2003), *marketing* (NIKOLAIDISL et al., 1993), qualidade (HIROTSU, 2001), zoologia (ROQUE et al., 2003), biologia marinha (GAERTNER, 1999), medicina (PALLI, RUSSO e DECARLI, 2001), nutrição (GUINOT, 2001), criminologia, paleontologia, lingüística, meteorologia e outros (GIFI, 1990 apud MICHAILIDIS, 1996).

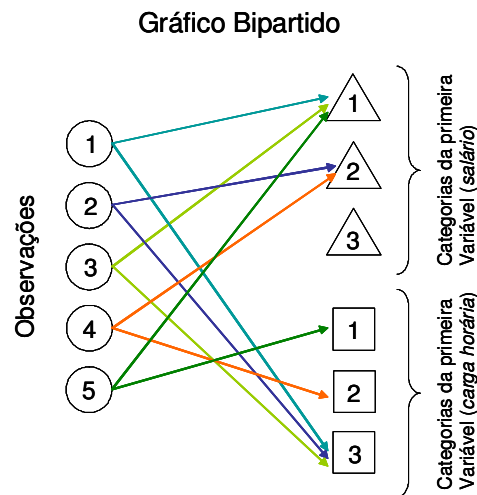
A técnica de HOMALS permite uma descrição gráfica do conjunto de dados baseada na redução de dimensionalidade, o que pode resultar na identificação e interpretação das associações entre as observações e as variáveis de estudo, com suas respectivas categorias. O número de dimensões originais do estudo é o número de variáveis estudadas, ou seja, quanto maior o número de variáveis e respectivas categorias, maior o número das dimensões originais.

A HOMALS tem como base a redução dimensional, visando obter a maior homogeneidade possível dos dados que é alcançada quando a função de perda é minimizada. Essa função, que é a média do quadrado dos comprimentos das “linhas” (distância euclidiana) que ligam as observações às categorias das variáveis, pode ser interpretada como o nível de ajuste de um modelo: quanto menor, melhor o ajuste modelo e vice versa. As observações e as variáveis são representadas como pontos em um espaço reduzido no qual se encontra, distribuída em suas dimensões, o tanto quanto possível da variabilidade total dos dados. A primeira dimensão apresenta a maior parte da variabilidade total dos dados (maior autovalor), a segunda dimensão apresenta a segunda maior parte da variabilidade total dos dados (segundo maior autovalor) e assim por diante. A proporção da variabilidade total apresentada em cada dimensão do espaço reduzido independe do número de dimensões do mesmo, pois as soluções

da HOMALS são aninhadas de forma que dada uma solução de  $p$  dimensões e outra de  $p+1$  dimensões, a segunda solução terá as  $p$  dimensões idênticas às  $p$  dimensões da primeira solução.

Segundo MICHAILIDIS e De LEEUW (1998), para o caso de  $J$  variáveis nominais, sendo que a variável  $j = 1, \dots, J$  possui  $l_j$  categorias, toda informação disponível na matriz de dados poderia ser representada por meio de um gráfico bipartido que ilustra os objetos conectados às categorias das variáveis às quais os mesmos pertencem, sendo que cada uma dessas variáveis poderia apresentar um número distinto de categorias.

A Figura 1 ilustra um exemplo de relação entre observações e variáveis categóricas nominais.



(Fonte: Adaptado de Michailidis e De Leeuw, 1998)

**Figura 1.** Exemplo de gráfico bipartido para 5 funcionários (*observações*) de uma empresa fictícia quanto às variáveis Salário (SL) e Carga Horária (CH), ambas com três categorias (1-INSATISFEITO; 2-INDIFERENTE; 3-SATISFEITO).

Em muitas situações estamos interessados em estudar a correlação simultânea entre diferentes variáveis. Nesse caso, a melhor análise gráfica seria a que identificasse um espaço dimensional reduzido, no qual observações e variáveis fossem representados em um único gráfico, preservando a maior quantidade de informação possível dos dados originais, como a técnica de HOMALS assim o faz.

Em relação às observações e às categorias das variáveis estudadas, são produzidas as matrizes dos *escores dos objetos* e a da *quantificação das categorias* com dimensões  $O \times p$  e  $Q \times p$ , respectivamente. Neste caso,  $O$  denota o número de observações estudadas;  $p$ , o número de dimensões do espaço reduzido em questão; e  $Q$ , o número total de categorias presentes no estudo ( $\sum_{j=1}^J l_j$ ), considerando todas as  $J$  variáveis originais. A matriz dos *escores dos objetos* e a matriz da *quantificação das categorias* informam as coordenadas em que as observações e as categorias das variáveis se encontram nesse espaço reduzido. Inicialmente os dados são codificados utilizando matrizes indicadoras  $G_j(i, t)$ , com valores iguais a 1 (um) se o objeto  $i = 1, \dots, N$  pertencer à categoria  $t = 1, \dots, l_j$  da variável  $j$  e 0 (zero) caso contrário.

A matriz  $G = [G_1, G_2, \dots, G_J]$ , por sua vez, é a matriz de vizinhança do gráfico bipartido. As matrizes indicadoras exercem papel fundamental na função de perda, que é a média do quadrado dos comprimentos das “linhas” que ligam as observações às categorias das variáveis, dada por:

$$\sigma(X; Y_1, \dots, Y_J) = J^{-1} \sum_{j=1}^J \text{SSQ}(X - G_j Y_j) \quad (1)$$

Em que:  $X$  = Matriz dos *Escores dos objetos* (observações), com dimensões  $O \times p$ ;

$Y_1, \dots, Y_J$  = Matrizes das *Quantificações das Categorias* das  $J$  variáveis estudadas (variável 1, ..., variável  $j$ ), com dimensões  $Q \times p$ ;

Note que em ( 1 ),  $\text{SSQ}(X - G_j Y_j)$  é a soma dos quadrados dos elementos da matriz  $(X - G_j Y_j)$  a partir da qual se deseja minimizar ( 1 ) em relação a  $X$  e a  $Y_j$ 's. Entretanto, a fim de evitar a solução trivial de  $X = 0$  e  $Y_j = 0$ , para todo  $j \in J$ , são necessárias as seguintes condições:

$$u'X = 0 \quad (2)$$

$$X'X = NI_p \quad (3)$$

Em que:  $N$  = número de observações;

$u$  = vetor composto por  $N$  valores iguais a 1 (um);

$I_p$  = matriz identidade de ordem  $p$ ; sendo que  $p$  é o número de dimensões do espaço reduzido em questão.

A primeira condição dada por ( 2 ) restringe a soma dos escores dos objetos a zero, ou seja, impõe que o gráfico seja centralizado na origem. Já a segunda condição dada por ( 3 ), padroniza o quadrado do comprimento dos escores dos objetos para o valor  $N$  e impõe que as colunas de  $X$  sejam ortogonais. Sendo assim, a equação ( 1 ), sujeita às condições ( 2 ) e ( 3 ), é minimizada utilizando o algoritmo de *Mínimos Quadrados Alternados* (BERRY,2006).

Uma vez calculadas as quantificações das categorias, podemos saber o grau de influência da variável  $j$  nas  $p$  dimensões do espaço reduzido por:

$$\eta_{js}^2 = \frac{\hat{Y}_j(.,s)D_j\hat{Y}_j(.,s)}{N}, \quad j \in J, \quad s = 1, \dots, p, \quad (4)$$

A medida representada por ( 4 ) é denominada discriminação da variável  $j$ , que, geometricamente, fornece a média dos quadrados das distâncias (ponderados pelas frequências marginais) da quantificação das categorias até a origem do espaço de  $p$  dimensões, sendo que o termo  $(.,s)$  é o vetor das observações da  $s$ -ésima dimensão da variável  $j$ . Outra informação importante em técnicas de redução de dimensionalidade, como a HOMALS, é a proporção da variabilidade total, contida no espaço original, apresentada nas  $p$  dimensões do espaço reduzido em questão. Tal informação é representada pelos autovalores, que correspondem à média das medidas de discriminação

das variáveis, fornecendo o grau de ajuste da solução HOMALS na  $s$ -ésima dimensão, da seguinte maneira:

$$\lambda_s = J^{-1} \sum_{j=1}^J \eta_{js}^2, \quad s = 1, \dots, p \quad (5)$$

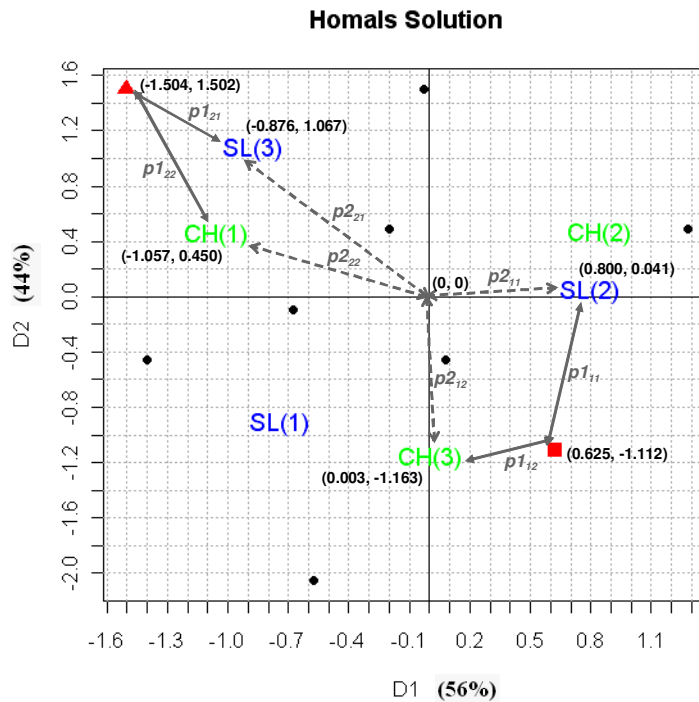
Os resultados típicos da HOMALS são: ( *i* ) os *escores das observações*, que representam suas respectivas coordenadas no espaço reduzido; ( *ii* ) as medidas de *discriminação das variáveis*, que representam a associação entre variáveis e dimensões, bem como a importância (peso) dessas variáveis; e ( *iii* ) a *quantificação das categorias*, que representam as coordenadas dos centróides das categorias das variáveis analisadas.

### 3. Escores Ponderados

A principal proposta deste trabalho é criação de escores a partir da solução HOMALS considerando a média ponderada dos valores numéricos das categorias às quais o respondente pertence, dadas todas as variáveis analisadas. Apresentaremos esta metodologia por meio de um exemplo: a satisfação, no qual respeito às variáveis *Salário (SL)* e *Carga Horária (CH)*, de 50 funcionários de uma empresa fictícia, sendo que tais variáveis possuem três categorias denotadas pelos números 1, 2 e 3 que significam, respectivamente, INSATISFAÇÃO, INDIFERENÇA e SATISFAÇÃO. Baseando-se nesses dados fictícios, disponíveis na Tabela A1 do ANEXO I, geramos o gráfico da Figura 2, assim como adaptamos o gráfico bipartido da Figura 1.

Todos os cálculos desse trabalho, inclusive a aplicação da HOMALS, foram realizados por meio do *software* R, versão 2.11.0, disponível gratuitamente em [www.r-project.org](http://www.r-project.org) (R Development Core Team, 2010).

A título de explicação de nosso método, calcularemos os ESCORES de apenas dois funcionários de nosso banco de dados fictício, os quais são representados na Figura 2 por um quadrado e um triângulo vermelhos, respectivamente.



**Figura 2.** Representação gráfica da solução HOMALS considerando a satisfação profissional de 50 funcionários quanto ao salário e a carga horária.

Percebemos que o funcionário 1 (quadrado) é representado no gráfico bidimensional como o par ordenado  $(0,625; -1,112)$ , enquanto o funcionário 2 (triângulo) é representado pelo par  $(-1,504; 1,502)$ . O funcionário 1 é indiferente em relação ao salário e satisfeito em relação à carga horária e, sendo assim, pertence às categorias SL(2) e CH(3), respectivamente. O funcionário 2, por sua vez, pertence às categorias SL(3) e CH(1).

Nesse sentido, propomos o cálculo dos escores a partir da seguinte expressão:



$$S_i = \frac{\sum_{j=1}^J K_{ij} \cdot p1_{ij} \cdot p2_{ij}}{\sum_{j=1}^J p1_{ij} \cdot p2_{ij}}$$

Onde:  $K_{ij}$  representa o valor numérico da categoria da variável  $j$  a qual pertence o  $i$ -ésimo indivíduo;  $p1_{ij}$  e  $p2_{ij}$  são os pesos aplicados na média ponderada, de forma que:

$$p1_{ij} = [(X_i - Y_{ij})^t (X_i - Y_{ij})]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e,} \quad p2_{ij} = [Y_{ij}^t \cdot Y_{ij}]^{-\frac{1}{2}}$$

Ambos os pesos apresentados acima são representações matriciais do inverso das seguintes distâncias euclidianas: (  $i$  ) entre o  $i$ -ésimo indivíduo e a categoria da variável  $j$  a qual ele pertence ( $p1_{ij}$ ); e (  $ii$  ) entre a categoria da variável  $j$  a qual o  $i$ -ésimo indivíduo pertence e a origem do gráfico  $n$ -dimensional ( $p2_{ij}$ ). Na expressão acima,  $X_i$  representa a posição no gráfico  $n$ -dimensional proporcionado pela solução HOMALS do  $i$ -ésimo indivíduo e  $Y_{ij}$  representa a posição da categoria da  $j$ -ésima variável a qual o  $i$ -ésimo indivíduo pertence.

Considerando o exemplo apresentado acima, o escore do funcionário 1 ( $S_1$ ) e o escore do funcionário 2 ( $S_2$ ) poderiam ser calculados das seguintes formas:

$$S_1 = \frac{K_{11} \cdot p1_{11} \cdot p2_{11} + K_{12} \cdot p1_{12} \cdot p2_{12}}{p1_{11} \cdot p2_{11} + p1_{12} \cdot p2_{12}} \quad ; \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{K_{21} \cdot p1_{21} \cdot p2_{21} + K_{22} \cdot p1_{22} \cdot p2_{22}}{p1_{21} \cdot p2_{21} + p1_{22} \cdot p2_{22}}$$

Sabendo que o funcionário 1 pertence às categorias SL(2) e CH(3),  $K_{11}$  e  $K_{12}$ , valem, respectivamente, 2 e 3. De forma análoga,  $K_{21}$  e  $K_{22}$ , valem, respectivamente, 3 e 1, uma vez que o funcionário 2 pertence às categorias SL(3) e CH(1). Com posse dessas informações, pode-se calcular  $p1_{11}$ ,  $p2_{11}$ ,  $p1_{12}$  e  $p2_{12}$  (funcionário 1), bem como  $p1_{21}$ ,  $p2_{21}$ ,  $p1_{22}$  e  $p2_{22}$  (funcionário 2), da maneira descrita no Quadro a seguir:

Funcionário 1	Funcionário 2
$p1_{11} = \frac{1}{\sqrt{(0,625 - 0,800)^2 + (-1,112 - 0,041)^2}} = 0,8575$	$p1_{21} = \frac{1}{\sqrt{(-1,504 - 0,876)^2 + (1,502 - 1,067)^2}} = 0,4133$
$p1_{12} = \frac{1}{\sqrt{(0,625 - 0,003)^2 + (-1,112 - (-1,163))^2}} = 1,6023$	$p1_{22} = \frac{1}{\sqrt{(-1,504 - (-1,057))^2 + (1,502 - 0,450)^2}} = 0,8749$
$p2_{11} = \frac{1}{\sqrt{(0,800)^2 + (0,041)^2}} = 1,2484$	$p2_{21} = \frac{1}{\sqrt{(-0,876)^2 + (1,067)^2}} = 0,7244$
$p2_{12} = \frac{1}{\sqrt{(0,003)^2 + (-1,163)^2}} = 0,8598$	$p2_{22} = \frac{1}{\sqrt{(-1,057)^2 + (0,450)^2}} = 0,8705$

**Quadro 1.** Cálculo dos pesos.

Por último, a partir dos valores encontrados no quadro acima, podemos calcular os escores dos funcionários 1 e 2, denotados por  $S_1$  e  $S_2$ , quanto a sua satisfação com a empresa:

$$S_1 = \frac{2 \cdot 0,8575 \cdot 1,2484 + 3 \cdot 1,6023 \cdot 0,8598}{0,8575 \cdot 1,2484 + 1,6023 \cdot 0,8598} = 2,5627 \quad ; \quad e \quad S_2 = \frac{3 \cdot 0,4133 \cdot 0,7244 + 1 \cdot 0,8749 \cdot 0,8705}{0,4133 \cdot 0,7244 + 0,8749 \cdot 0,8705} = 1,5644$$

Naturalmente, poderíamos também calcular os escores dos funcionários 3, 4, 5, 6,... 50 (denotados por  $S_3, S_4, S_5, S_6, \dots, S_{50}$ ). A metodologia proposta pode ser utilizada para qualquer número de indivíduos, variáveis e categorias, bem como se pode calcular as distâncias euclidianas para qualquer número de dimensões.

#### 4. Considerações Finais

O trabalho aqui apresentado teve como intuito propor uma nova metodologia para a criação de escores ponderados, baseados na análise conjunta de um banco de dados categóricos. Para tal, utilizou-se os resultados obtidos a partir da aplicação de uma técnica bastante difundida na literatura, conhecida

como Análise de Homogeneidade ou Análise de Correspondência Múltipla. Entretanto, compreendemos que esta é apenas uma fase inicial de um processo mais amplo de análise no qual potencialmente poderemos utilizar os escores criados a partir da metodologia desse trabalho a fim de representarem variáveis dependentes de modelos explicativos para atitudes, satisfação, impactos e outras variáveis multidimensionais (aquelas que contemplam, implícita ou explicitamente, um conjunto de fatores correlacionados). A técnica proposta nesse trabalho também permite a aplicação subsequente de modelos explicativos do tipo transversais e longitudinais, uma vez que o perfil médio dos escores pode sofrer alterações ao longo do tempo.

## **5. Agradecimentos**

Os autores agradecem pelo apoio recebido da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), através de recursos referentes ao projeto CEX-APQ-00467-2008 (Universal), para a realização deste trabalho.

## **Referências**

BERRY, M., BROWNE, M., LANGVILLE, A., PAUCA, P., PLEMMONS, R., 2006, *Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization*. Computational Statistics and Data Analysis.

GIFI, A., 1990, *Nonlinear Multivariate Analysis*, Chichester: Wiley

MICHAILIDIS, G., De LEEUW, J., 1998, “*The Gifi System of descriptive multivariate analysis*”, Statistical Science, v. 13, pp. 307-336.

PEREIRA, J. C. R., 1999, *Análise de dados quantitativos: estratégias metodológicas para as ciências da saúde, humanas e sociais*. 2ª edição. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo.

R DEVELOPMENT CORE TEAM, 2010, *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.Rproject.org>.

SHABROVA, E. V., KHUSNUTDINOVA, E. K., TARSKAIA, L. A et al., 2004, “DNA diversity of human populations from Eastern Europe and Siberia studied by multilocus DNA fingerprinting”, *Mol Gen Genomics*, 271: 291-297.

BECERRA, M., LOMBARDÍA-FERREIRA, L. J., HAUSER, N. C. et al., 2002, “The yeast transcriptome in aerobic and hypoxic conditions: effects of *hap1*, *rox1*, *rox3* and *srb10* deletions”, *Molecular Microbiology*, 43(3), 545–555

LAUTSCH, E., THÖLE, U., 2002, “Classification and explanation of life conceptions using the case of the 14th Shell Youth Study”, *Psychology Science*, Volume 45, 2003 (2) p. 263-279.

WILLIAMS, A. H., LAWSON, M. J., 2004, “A Correspondence Analysis of Child-Care Students’ and Medical Students’ Knowledge about Teaching and Learning”, *International Education Journal*, v. 5, n. 2.

LOMOLINO, M. V., SMITH, G. A., 2003, “Terrestrial vertebrate communities at black-tailed prairie dog (*Cynomys ludovicianus*) towns”, *Biological Conservation* 115, 89-100.

NIKOLAIDISL, A., BAOURAKISL, G., DARDABOUNISL, P. et al., 1993, “Production and Marketing of Cretan olive oil and Wine”, *Options Mediterraniennes*, Ser. A / n° 23.

HIROTSU, C., 2001, “STATISTICAL TRAINING OF RESEARCHERS IN TOTAL QUALITY MANAGEMENT: THE JAPANESE EXPERIENCE”, *Training Researchers in the Use of Statistics*, 53-63.

ROQUE, F. O., TRIVINHO-STRIXINO, S., STRIXINO, G., AGOSTINHO, R. C. and FOGO, J. C., “Benthic macroinvertebrates in streams of the Jaragua State Park (Southeast of Brazil) considering multiple spatial scales”, 2003, *Journal of Insect Conservation*, 7: 63-72.

GAERTNER, J. C., MAZOUNI, N., SABATIER, R. et al., 1999, "Spatial structure and habitat associations of demersal assemblages in the Gulf of Lions: a multicompartmental approach", *Marine Biology*, 135: 199-208.

PALLI, D., RUSSO, A., DECARLI, A., 2001, "Dietary patterns, nutrient intake and gastric cancer in a high-risk area of Italy", *Cancer Causes and Control*, 12: 163±172.

GUINOT, C., LATREILLE, J., MALVY, D. et al., 2001, "Use of multiple correspondence analysis and cluster analysis to study dietary behaviour: Food consumption questionnaire in the SU.VI.MAX. cohort", *European Journal of Epidemiology*, 17: 505-516.

MICHAILLIDIS, G., 1996, *Multilevel Homogeneity Analysis*, Ph.D. Thesis, Departamento of Mathematics, University of California at Los Angeles – UCLA.

## ANEXO I

**Tabela A1.** Dados fictícios sobre a satisfação de 50 funcionários de uma suposta empresa no quis respeito às variáveis *Salário (SL)* e *Carga Horária (CH)*.

<b>Funcionário</b>	<b>SL</b>	<b>CH</b>	<b>Funcionário</b>	<b>SL</b>	<b>CH</b>
<b>1</b>	2	3	<b>26</b>	2	1
<b>2</b>	3	1	<b>27</b>	2	2
<b>3</b>	1	3	<b>28</b>	2	2
<b>4</b>	2	2	<b>29</b>	3	3
<b>5</b>	1	1	<b>30</b>	2	3
<b>6</b>	1	3	<b>31</b>	1	1
<b>7</b>	3	2	<b>32</b>	2	3
<b>8</b>	3	3	<b>33</b>	2	1
<b>9</b>	1	1	<b>34</b>	2	2
<b>10</b>	1	2	<b>35</b>	3	1
<b>11</b>	3	2	<b>36</b>	2	2
<b>12</b>	1	3	<b>37</b>	2	3
<b>13</b>	2	3	<b>38</b>	3	1
<b>14</b>	1	3	<b>39</b>	2	1
<b>15</b>	2	2	<b>40</b>	3	1
<b>16</b>	2	2	<b>41</b>	2	1
<b>17</b>	2	2	<b>42</b>	2	2
<b>18</b>	3	2	<b>43</b>	1	1
<b>19</b>	1	1	<b>44</b>	2	2
<b>20</b>	3	1	<b>45</b>	3	3
<b>21</b>	1	2	<b>46</b>	2	3
<b>22</b>	2	1	<b>47</b>	2	2
<b>23</b>	1	1	<b>48</b>	2	2
<b>24</b>	1	2	<b>49</b>	2	3
<b>25</b>	1	2	<b>50</b>	2	2