Valor em Risco (VaR) para Modelos de Volatilidade Determinística e Estocástica: Um estudo Comparativo pelo "Backtesting"

André Barbosa Oliveira[1]

Resumo

Este trabalho faz uma comparação dos modelos de volatilidade determinística, pelo emprego dos modelos GARCH, em relação aos modelos de volatilidade estocástica. Existem diferentes modelos de volatilidade, cada um deles tenta uma melhor descrição das séries financeiras ao longo de sua trajetória observada e apreender suas características, como: clusters de volatilidade, assimetria e efeito "alavancagem". Não existe um único modelo de volatilidade que seja o melhor em todas as situações, pois as propriedades das séries financeiras são distintas em termos de volatilidade, algumas mais voláteis que outras, e a volatilidade de uma mesma série se altera ao longo do tempo. Para a comparação dos modelos uso as séries financeiras com díspares graus de instabilidade: a taxa de câmbio, índice BOVESPA e os preços da soja em grão, empregando o backtest para o valor em risco gerado pelos distintos modelos. Como resultado, todos os modelos GARCH e de volatilidade estocástica estacionários se enquadraram no VaR com nível de confiança que foi especificado (95%) sobre as distintas séries financeiras.

Abstract

This paper makes a comparison of deterministic volatility models, using the GARCH models, with stochastic volatility models. There are different models of volatility, each attempt a better description of financial series over the time and describes their observed characteristics, such as volatility clustering, asymmetry and effect of "leverage." There is not a single model of volatility who is the best for all situations, because the properties of financial series are distinct in terms of volatility, some more volatile than others, and the volatility in a given series changes over time. For comparison of these models consider financial time series with differing degrees of instability: the exchange rate, stock market index and prices of soybeans, using the backtest for the value at risk generated by the different models. As a result, all the GARCH models and stochastic volatility stationary fit the VaR with a confidence level that was specified (95%) on the different financial series.

1 – Introdução

O risco é inerente a economia onde não temos cenários estáticos e alternam-se situações de equilíbrio e desequilíbrios temporários. A economia é caracterizada por apresentar riscos onde ocorrem variações dos preços dos bens e dos ativos de forma inesperada, tornando necessários modelos de volatilidade associados a instrumentos financeiros que permitam um melhor gerenciamento do risco.

Os mercados estão sujeitos a risco, com variação nos preços dos ativos caracterizando o risco de mercado. No mercado de ativos, os seus preços dependem das expectativas dos agentes sobre sua valoração, e não sabemos os preços dos ativos que vão vigorar no futuro. No mercado cambial, as empresas com contratos associados à moeda estrangeira estão expostas aos riscos de variabilidade da taxa de câmbio. Para uma empresa exportadora é passível de ocorrer uma diminuição de sua receita de exportação enquanto o contrato de exportação não for liquidado, havendo a

[1] Doutorando em Economia - FGV/SP.

possibilidade de diminuição de suas receitas com a valorização da moeda doméstica. Enquanto que uma empresa com insumos importados apresenta custos de produção atrelados a taxa de câmbio, e desvalorização em relação a moeda externa pode tornar impeditivo continuar a atividade. Ainda, no mercado agrícola, um produtor toma sua decisão de produção sem saber o preço do produto no momento da safra, e são imprevisíveis as oscilações de oferta e, conseqüente, dos preços devido a condições climáticas, pragas, etc.

Na gestão de risco são fundamentais os derivativos que permitem aos agentes se protegerem de situações incertas pelo uso de instrumentos financeiros, como: hedge, contratos a termo, futuros e swaps. Os derivativos realocam os riscos das atividades entre os participantes do mercado tornando mais eficientes os mercados.

Com a importância do risco na economia e variabilidade dos preços/retornos dos ativos são fundamentais os modelos de volatilidade que são usados para precificar os ativos e são essenciais para medidas de risco que auxiliam no processo de tomada de decisão dos agentes. Na gestão de risco são empregadas medidas de risco como o valor em risco baseados na moderna teoria financeira associados aos modelos de volatilidade.

As características da variabilidade dos preços dos ativos e bens nos diferentes mercados são distintas e não existe um único modelo que seja o melhor para todas as situações. O objetivo deste trabalho é comparar os modelos de volatilidade determinística e estocástica para séries com gradativo comportamento de volatilidade, de mais estável as mais irregulares, empregando para objeto de estudo: a taxa de câmbio, o índice da bolsa de valores de São Paulo – IBOVESPA, e o índice CEPEA/ ESALQ para os preços da soja em grão. Os modelos de volatilidade são avaliados com o emprego do valor em risco considerando o *backtest*.

Os modelos de volatilidade estocástica e determinística tem sido alvo de grande número de estudos. Uma abordagem para comparação dos modelos de volatilidade é a sua previsão em relação a uma medida de variância *benchmark* (MORAIS & PORTUGAL, 1999). Uma alternativa empregada na literatura é considerar a qualidade de ajuste dos modelos pelo número de previsões dentro do intervalo de confiança e o comprimento do intervalo de confiança (HERÊNCIA, HOTTA, VALLS, 1998).

A volatilidade é uma medida não observada e a análise de seu desempenho preditivo é limitada pela escolha de uma variância *benchmark* arbitrária, enquanto a verdadeira volatilidade seria a variação dos preços/retornos dos ativos a cada transação na bolsa de valores. Neste trabalho faço uma comparação dos modelos de volatilidade estocástica e determinística em termos do valor em risco (VaR) e emprego do *backtest*, sendo um procedimento comum usado pelos agentes no mercado financeiro (órgãos reguladores do sistema financeiro, bancos, fundos de pensão, etc.), na avaliação de gestão de risco.

O trabalho faz a comparação dos modelos de volatilidade determinística e estocástica usando séries financeiras de diferentes intensidades de volatilidade. A seção 2 apresenta as características dos modelos de volatilidade determinística seguindo-se uma exposição dos modelos de volatilidade estocástica, com algum detalhe. A seção 3 introduz o conceito do valor em risco – VaR. A seção 4 trata do estudo empírico do trabalho com a estimação dos modelos, e dentre o modelo determinístico e de volatilidade estocástica com melhor ajuste, são avaliados seus desempenhos pelo *backtest*. Uma ultima seção trata das considerações finais.

2 – Modelos de Volatilidade Determinística e Estocástica

As séries temporais financeiras possuem características particulares que outras séries não exibem e buscamos modelos que melhor descrevem o seu comportamento. Os retornos dos ativos financeiros geralmente possuem certas características correspondestes aos fatos estilizados dos retornos financeiros, como: imprevisibilidade com ausência de correlação; média em torno de zero; clusters de volatilidade; os valores extremos são recorrentes, com mais observações nas caudas da distribuição dos retornos que a distribuição normal; e assimetria, volatilidade mais pronunciada frente a retornos negativos em relação a retornos positivos (TSAY, 2005; MORETTIN & TOLOI, 2004; ENDERS, 2004).

As principais formas de estimação da volatilidade são a partir dos modelos de volatilidade determinística e modelos de volatilidade estocástica. A volatilidade em sua forma mais básica é definida como o desvio padrão dos retornos ou preços dos ativos, sendo uma variável latente, enquanto uma melhor aproximação seria pela variação dos preços/retornos dos ativos a cada negociação fechada na bolsa de valores.

A forma geral de estimação da volatilidade é modelando a volatilidade ao longo do tempo como a heterocedasticidade da série de retornos financeiros, onde empregamos as abordagens de volatilidade determinística ou volatilidade estocástica. Outros métodos de estimação da volatilidade semi-paramétricos, ou não paramétricos estão disponíveis[2]. Este trabalho se limita a discutir os modelos de volatilidade determinística e estocástica.

A abordagem de volatilidade determinística é baseada nos modelos da família GARCH, generalizados ARCH, modelando a volatilidade como a heterocedasticidade condicional da série temporal como uma função determinística dos quadrados dos retornos e da volatilidade dos períodos anteriores. A característica determinística dos modelos de volatilidade da família GARCH é apresentada por seus parâmetros fixos e invariantes no tempo.

Pela abordagem de volatilidade estocástica a volatilidade é modelada como um componente não observável da série temporal. Nos modelos de volatilidade estocástica a volatilidade é especificada como um processo estocástico linear, na forma de um processo autoregressivo, que se altera ao longo do tempo (MORETTIN, 2006). Os modelos de volatilidade estocástica podem ser apresentados com uma aproximação em tempo discreto dos modelos de tempo continuo usados na precificação de opções e derivativos (HARVEY, 1994).

Uma vantagem dos modelos de volatilidade determinística é a sua facilidade de estimação diretamente a partir da função de verossimilhança formulada em termos de erro de previsão um passo a frente, os modelos de volatilidade estocástica somente podem ser estimados por máxima verossimilhança usando adaptações (BROTO & RUIZ, 2004). As vantagens dos modelos de volatilidade estocástica são que as suas propriedades estatísticas são obtidas diretamente do processo estocástico considerado para a volatilidade.

Nas subseções seguintes apresentam-se as características dos modelos da família GARCH, na subseção 2.1; e na seguinte 2.2, os modelos de volatilidade estocástica são discutidos com alguma extensão.

2.1 – Modelos de Volatilidade Determinística

Uma forma de modelo dinâmico para medir a volatilidade, como função dos retornos a cada instante do tempo, seria pela heterocedasticidade condicional da

[2] Para uma análise de modelos volatilidade por redes neurais ver (BILDIRICI & ERSIN, 2009).

equação da média dos retornos dos ativos. Nesta especificação modelamos a volatilidade como a heterocedasticidade condicional que se altera a cada nova observação da série de retornos, X_t. Para séries sem volatilidade seriam homocedásticas, e a heterocedasticidade condicional é constante. Sendo a volatilidade modelada como:

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$
$$h_t = \alpha_0 + H\big(X_{t-i}; h_{t-j}\big) \text{ , para i, j} \in \text{N}$$

O modelo precursor dos modelos de volatilidade é o modelo ARCH – Autoregressivo de Heterocedasticidade Condicional, que contempla parcialmente os fatos estilizados dos retornos dos ativos, sendo intuitiva a volatilidade como um processo autoregressivo descrevendo o comportamento dos clusters de volatilidades. Dos modelos de Heterocedasticidade Condicional surgiram inúmeros outros, como a generalização pelo modelo GARCH – Generalizado ARCH, que permite uma estrutura mais parcimoniosa em relação ao modelo ARCH.

Nos modelos de heterocedasticidade condicional como ARCH - Autoregressivo de Heterocedasticidade Condicional -, e sua generalização GARCH – Generalizado ARCH -, seja uma série de tempo $\{X_t\}_z$ não correlacionada e que possui heterocedasticidade condicional. A forma geral dos modelos GARCH (r,s) é dada por:

$$X_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j h_{t-j}$$

A forma geral é apresentada pelo modelo GARCH (r,s). Se $s = 0$, então resulta no modelo ARCH(r). O modelo ARCH usa o quadrado do retorno como estimador não enviesado[3] da heterocedasticidade condicional, h_t, e uma representação possível é do quadrado dos retornos como um processo autoregressivo; enquanto no modelo GARCH, o quadrado dos retornos pode ser apresentado como um processo autoregressivo e de média móvel - ARMA.

Os modelos ARCH e GARCH são modelos de volatilidade que tratam simetricamente os efeitos dos retornos positivos e negativos sobre a volatilidade. Posteriormente foram desenvolvidos modelos assimétricos, capturando o efeito distinto sobre a volatilidade de retornos positivos e negativos como TGARCH, EGARCH. A extensão dos modelos da família GARCH continua detalhando mais elementos que estão associados a volatilidade.

2.2 – Modelos de Volatilidade Estocástica

O modelo de volatilidade estocástica considera a volatilidade como um componente não observável da série temporal. Na modelagem da volatilidade estocástica seja a série temporal, X_t , como a série dos retornos financeiros, é decomposta em um termo σ, sendo o desvio padrão, e um termo de erro ruído branco, ε_t. Em que a volatilidade, como o logaritmo da variância σ^2, denotada por h_t, é um processo estocástico. O modelo de volatilidade estocástica para a série de retornos, X_t, é dado por:

[3] Condicionalmente ao passado o quadrado dos retornos é um estimador não viciado da heterocedasticidade condicional.

$$X_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t = e^{\frac{h_t}{2}}$$

, onde ε_t, são erros ruído branco com distribuição normal com média zero e variância igual a unidade, ε_t~N(0,1); h_t, é uma seqüência que pode ser estacionária ou não estacionária. Ao especificarmos a volatilidade como o logaritmo da variância esta atendente a restrição de não-negatividade para a variância.

Uma especificação mais simples para a volatilidade, h_t, é descrita como um processo autoregressivo de primeira ordem, AR(1), com a volatilidade dada por:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t$$

, em que η_té um termo de erro com média zero e variância σ_η^2, η_t~ N(0, σ_η^2). Para que a volatilidade seja um processo estacionário o coeficiente autoregressivo deve ser menor que a unidade, $|\alpha_1| < 1$. Ainda, com a volatilidade como um processo estocástico autoregressivo, é importante notar que um componente da variância estocástica é constante, α_0, e outro variante no tempo dependendo da volatilidade do período precedente, h_{t-1}.

No modelo de volatilidade estocástica as características da série dos retornos, X_t, estão associadas a especificação da volatilidade, uma vez que é definido como o produto da volatilidade e um termo de perturbação. As características do modelo de volatilidade estocástica para a série dos retornos são:

i) $E(X_t) = E(\sigma_t \varepsilon_t) = E(\sigma_t)E(\varepsilon_t) = 0$
ii) VAR(X_t) $= E(X_t^2) = E(\sigma_t^2)E(\varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)$

Para a volatilidade como um processo autoregressivo de primeira ordem estacionário com erros η_t~ N(0, σ_η^2), então:

iii) $E(h_t) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$
iv) VAR $(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\alpha_1^2}$

, e assim h_t~ N$\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}; \frac{\sigma_\eta^2}{1-\alpha_1^2}\right)$.

O modelo de volatilidade estocástica pode ser generalizado para que a volatilidade seja um processo ARMA, mantendo sua característica estacionária. Ou ainda, podemos formular a volatilidade como um processo não estacionário na forma de passeio aleatório, representando o comportamento persistente muitas vezes verificado na volatilidade.

O coeficiente autoregressivo da volatilidade expressa o comportamento de persistência da volatilidade. Quando este é próximo da unidade, o modelo de volatilidade estocástica se aproxima de um modelo GARCH(1,1), com coeficiente ARCH e GARCH somados perto da unidade; para o coeficiente autoregressivo da volatilidade igual a unidade, a volatilidade é representada como um passeio aleatório e é similar a um modelo GARCH integrado – IGARCH(1,1) (MORETTIN & TOLOI, 2004).

O modelo de volatilidade estocástica descreve a volatilidade como um componente não observável da série temporal, e pode ser apresentado com a série de retornos descrita numa abordagem de variância heterocedástica, como processo estocástico. Sendo a série de retornos, X_t, tendo o seu comportamento ao longo do tempo descrito pelas suas características salientes por um termo de variância constante homocedástica, σ_*, um termo de heterocedasticidade como a volatilidade, h_t, sendo um processo estocástico, e a irregularidade, ε_t. Desta forma o modelo de volatilidade estocástica tem sua apresentação como:

$$X_t = \sigma_* \varepsilon_t e^{\frac{h_t}{2}} \qquad , \varepsilon_t \sim \text{N}(0,1);$$

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t \quad , \eta_t \sim \text{N}(0, \sigma_\eta^2)$$

, o termo σ_* é um componente de escala, o qual torna desnecessário o termo de constante na volatilidade, sendo $\sigma_* = e^{\frac{-\alpha_0}{2}}$.

Para esta especificação a variância dos retornos esta intimamente associada a volatilidade, obtida como:

$$\text{VAR}(X_t) = E(X_t^2 | F_{t-1}) = \sigma_*^2 \sigma_{\varepsilon_t}^2 e^{\frac{\sigma_\eta^2}{2}}$$

, com F_{t-1}o conjunto de informação do período anterior.

O modelo de volatilidade estocástica pode ser linearizado, tomando-se o logaritmo do quadrado dos retornos, e apresentado como:

$$\ln(X_t^2) = \ln(\sigma_*^2) + \ln(\varepsilon_t^2) + h_t$$

Ao tomar o logaritmo do quadrado dos retornos o termo de erro, que possui distribuição normal, passa a ter distribuição *log qui-quadrado* com média E$[\ln(\varepsilon_t^2)]$= -1.27, e variância, VAR$[\ln(\varepsilon_t^2)]$= $\frac{\pi^2}{2}$. Para devolver as boas propriedades aos erros, consideramos a inovação $\xi_t = \ln(\varepsilon_t) - \text{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$. Assim, somando e diminuindo E $[\ln(\varepsilon_t^2)]$ a forma do modelo linearizado pelo logaritmo do quadrado dos retornos, temos:

$$\ln(X_t^2) = \ln(\sigma_*^2) + \ln(\varepsilon_t^2) + h_t + \text{E}[\ln(\varepsilon_t^2)] - \text{E}[\ln(\varepsilon_t^2)]$$
$$\ln(X_t^2) = \ln(\sigma_*^2) + \text{E}[\ln(\varepsilon_t^2)] + h_t + \ln(\varepsilon_t^2) - \text{E}[\ln(\varepsilon_t^2)]$$

Desta forma o modelo de volatilidade estocástica pode ser descrito em formato de espaço de estado, com a equação de transição para a volatilidade determinando o estado do sistema a cada instante do tempo, como:

$$\ln(X_t^2) = k + h_t + \xi_t$$

$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t$$

, sendo $\xi_t = \ln(\varepsilon_t) - \text{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$, e $k = \ln(\sigma_*^2) + \text{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$.

No modelo de volatilidade estocástica a volatilidade pode ser estacionária, como um processo autoregressivo, ou não estacionária, como passeio aleatório. A representação de espaço de estado para o modelo de volatilidade estocástica estacionário, chamando Y = ln (X_t^2), é dada por um modelo de nível local constante + AR(1), como:

$$Y_t = k_t + h_t + \varepsilon_t$$
$$k_t = k_{t-1} = k$$
$$h_t = \alpha_1 h_{t-1} + \eta_t$$

Para o modelo de volatilidade estocástica não estacionário, sua representação em formato de espaço de estados é dada pelo modelo de nível local:

$$Y_t = h_t + \varepsilon_t$$
$$h_t = h_{t-1} + \eta_t$$

Apesar das operações de aplicar o logaritmo ao quadrado dos retornos permitirem colocar o modelo de volatilidade estocástica na forma de espaço de estado, isto implica numa dificuldade empírica de que os retornos podem ser nulos e não podemos definir os logaritmos. Neste caso, um procedimento adotado é retirar a média série dos retornos; alternativamente pode-se aplicar uma aproximação pela expansão de Taylor, apresentada abaixo, com a constante c sendo um número pequeno[4] e S_X^2 a variância amostral da série dos retornos, X_t.

$$\ln(X_t^2) \cong \ln(X_t^2 + cS_X^2) - \frac{cS_X^2}{(X_t^2 + cS_X^2)}, \ t = 1, ..., \ T.$$

O modelo de volatilidade estocástica descreve a volatilidade como um componente não observável da série temporal e o vetor de estados estimado para a volatilidade pode ser interpretado como a participação da volatilidade no nível subjacente da série dos retornos (KOOPMAN, et al; 2000). Para obtermos a estimativa da variância estocástica devemos estimar a parte da variância homocedástica da série temporal, σ_*^2, e o desvio padrão da série temporal será $\sigma_* * \exp\left(\frac{1}{2} h_{t/T}\right)$.

Na especificação da série dos retornos no modelo de volatilidade estocástica este tem média zero e, desta forma, a esperança do quadrado dos retornos consiste na variância estocástica. A partir da estimação do modelo de volatilidade estocástica chegamos a estimação do nível constante k, na equação de medida, e da volatilidade, h_t. As estimativas da variância estocástica da série dos retornos X_t é obtida a partir da definição do retorno, seja:

$$X_t = \sigma_* \varepsilon_t e^{\frac{h_t}{2}}$$
$$\mathrm{VAR}(\mathrm{X_t}) = E(X_t^2) = E(\sigma_*^2 \varepsilon_t^2 e^{h_t})$$
$$\mathrm{VAR}(\mathrm{X_t}) = \sigma_*^2 e^{h_t}$$

[4] No pacote estatístico STAMP esta é chamada de transformação de volatilidade estocástica e a constante c é predeterminada como, c=0.02.

, mas como as estimativas que temos são a partir da transformação pelo logaritmo do quadrado da série dos retornos, e considerando a inovação $\xi_t = \ln(\varepsilon_t) - \mathrm{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$, e $k = \ln(\sigma_*^2) + \mathrm{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$, assim a estimativa da variância homocedástica é recuperada desfazendo a transformação do nível constante, por:

$$k = \ln(\sigma_*^2) + \mathrm{E}\,[\ln(\varepsilon_t^2)]$$
$$\ln(\sigma_*^2) = k + 1.27$$
$$\sigma_*^2 = \exp\,(k + 1.27)$$
$$\sigma_* = [\exp(k + 1.27)]\hat{}(\frac{1}{2})$$

Então a volatilidade filtrada, $V_{f,t}$, e a volatilidade suavizadas, $V_{s,t}$, são dadas por:

$V_{f,t} = \sigma_*^2 * \exp\,(h_{t/t-1})$ e $V_{s,t} = \sigma_*^2 * \exp\,(h_{t/T})$.

A estimação do modelo de volatilidade estocástica é feita a partir de sua forma linearizada tomando o logaritmo e o quadrado dos retornos e aplicando o filtro de Kalman[5] ao modelo em formato de espaço de estado obtendo estimativas filtradas do vetor de estados, como estimação condicionada a observação anterior; ou estimativas suavizadas do vetor de estados obtendo estimativas do vetor de estados usando todo o conjunto de informação. No processo de estimação pelo filtro de Kalman, aplicamos o filtro de Kalman para obter os erros de previsão um passo a frente e a variância do erro de previsão, para alimentarmos a função de verossimilhança na forma de erro de previsão para estimar os hiperparâmetros desconhecidos (CUTHBERTSON; HALL; TAYLOR, 1992).

Desde que o modelo de volatilidade estocástica não é condicionalmente gaussiano a função de verossimilhança exata pelos erros de previsão resultante não pode ser aplicada, e estimamos o modelo usando o método de quase-máxima verossimilhança tratando as inovações, $\xi_{t,}$como normais NID $(0, \frac{\pi^2}{2})$ (HARVEY, 1994). A estimação do modelo de volatilidade estocástica pelo filtro de Kalman resulta no estimador de erro quadrático médio mínimo na classe de todos os estimadores lineares, para o vetor de estados e das observações futuras.

3 – Valor em Risco (*Value at Risk* - VaR)

O valor em risco é um conceito empregado para medir o risco de mercado, mensurando a exposição de uma posição financeira em relação às variações máximas dos retornos. O valor em risco mede a pior perda que um ativo ou carteira de portfólio pode incorrer devido a eventos extremos, em situações de mercado normais (J. P. MORGAN BANK, 1999).

O valor em risco consiste no retorno mínimo proporcionado por um ativo para um intervalo de tempo projetado, sobre dada probabilidade. Seja, uma série de retornos

[5] O filtro de Kalman é um processo de estimação na forma de atualização de estimação continuamente e combina a informação a priori com a informação amostral, resultando em estimativas do vetor de estados atualizadas a cada momento. O filtro de Kalman pode ser considerado como um processo de estimação seqüencial que simula o comportamento e aprendizado dos agentes com estimação adaptativa a cada nova informação.

financeiros, X_t, para um horizonte de tempo, l, o valor em risco para uma posição comprada, com probabilidade p, 0 < p < 1, é dado em termos de p-quantil como:

$$p = \mathrm{P}\,(X_l \leq \mathrm{VaR}\,) = F_l(\,\mathrm{VaR}\,) = \int_y^{\mathrm{VaR}} f(y)dy$$

, onde X_l, é a série de log retornos para o período de tempo l, como $X_l = \Delta P_l = P_{t+l} - P_t$, para $P_i \epsilon \{t, t+1, \dots, T\}$ em logarítimos; e $F_l(\,.\,)$, a função distribuição acumulada dos retornos no período de tempo l.

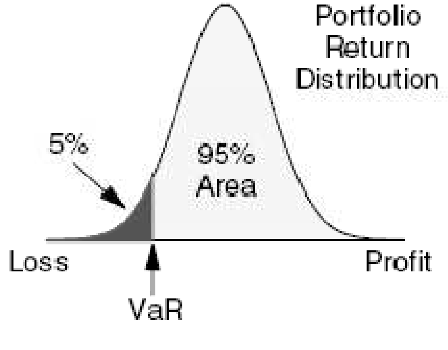
Para a expressão do p-quantil da distribuição da variação do preço do ativo, na prática, estimamos este quantil pela distribuição empírica dos retornos. A quantia em unidades monetárias do valor em risco resulta na multiplicação do valor da posição financeira pelo VaR do log retorno. Ainda, enquanto o valor em risco para uma posição comprada é dado em termos do lado direito da função distribuição, para uma posição vendida o VaR é especificado para o lado direito da função distribuição (MORETTIN, 2006).

O valor em risco pode ser considerado como uma extensão de análise de intervalo de confiança, em que ao invés de usar estimativas dos parâmetros da população avaliamos as estimativas dos parâmetros do processo gerador dos dados, oriundos de modelo de série de tempo para a série de retornos e volatilidade.

Desta forma o valor em risco, VaR, consiste na aplicação de intervalo de confiança unilateral para série de retornos para a ocorrência de um certo nível de perda da carteira, com um nível de confiança especificado. Ademais, assume-se distribuição normal para a série dos retornos, com variância dada pela estimação da volatilidade, tal que $X_l \sim N(0, \tilde{\sigma}_t^2)$. O valor em risco, como a perda máxima de um ativo no período t, para o nível de confiança de $1 - \alpha$, é dada como especificado a seguir e na figura 1:

$$P\,(\,X \leq \mathrm{VaR}\,) = 1 - \alpha$$
$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\mathrm{VaR} - 0}{\tilde{\sigma}_t}\right) = 1 - \alpha$$
$$P\left(Z \leq \frac{\mathrm{VaR}}{\tilde{\sigma}_t}\right) = 1 - \alpha$$
$$P\,(\,Z * \tilde{\sigma}_t \leq \mathrm{VaR}) = 1 - \alpha$$

Figura 1 – Valor em Risco (VaR).



Fonte: J. P. Morgan Bank, (1999).

Neste caso, como a distribuição normal reduzida possui a mesma área sobre a densidade que a de uma distribuição normal a padronização de uma variável aleatória, suposta com distribuição normal, permite um tratamento equivalente entre a variável padronizada e os quantis da distribuição normal reduzidos, aqui identificados como Z. Isto evita o calculo de integrais intratáveis que já estão disponíveis tabuladas.

A suposição dos retornos com distribuição normal com média zero e variância dada pelo modelo de volatilidade, $X_l \sim N(0, \tilde{\sigma}_t^2)$ atende aos fatos estilizados dos retornos: os retornos possuem em geral tem média em torno de zero; e a variância dos retornos é igual ao valor esperado da volatilidade, condicional ao conjunto de informação do período anterior.

O intervalo de confiança, e desta forma, o valor em risco do modelo proposto para a distribuição hipotizada dos retornos esta associado à precisão da estimação. Um intervalo de confiança mais estreito esta associado a um estimador mais preciso da quantidade de interesse. Na abordagem do valor em risco por intervalo de confiança unilateral fica denotada a característica do valor em risco como valor p-quantil. Mais especificamente, o valor em risco é o limite inferior para o retorno previsto da distribuição dos retornos para um dado nível de confiança.

No estudo do valor em risco não são as observações que são aleatórias, são os limites estimados para as observações dos retornos que são variáveis aleatórias. Porém uma vez que eles tenham sido estimados e estes são fixos contem ou não o valor do retorno proposto, e devem atender este valor em $(1 - \alpha) * 100\%$ dos valores observados.

Para o calculo do valor em risco considerando a distribuição dos retornos com distribuição normal com média $\hat{r}_t$ e variância $\hat{\sigma}_t^2$, $X_t \sim N(\hat{r}_t, \hat{\sigma}_t^2)$. Para o modelo dos retornos com volatilidade: $X_t = \sigma_t \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, com variância dos retornos como a variância condicional,$\mathrm{VAR}(X_t|F_{t-1}) = E(X_t^2|F_{t-1}) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2)$, o valor em risco é dado por:

$$\mathrm{VaR_t} = \hat{r}_t - Z\hat{\sigma}_t^2$$

O valor em risco é uma medida de risco muito flexível que pode considerar diferentes valores de nível de confiança e horizontes de tempo. Para a especificação do nível de confiança este geralmente varia entre 90% e 99%, sendo um procedimento comum usar 95% de nível de confiança, que corresponde a uma violação ao mês comercial, ou a cada 20 dias de transação. Por sua vez, o período para o valor em risco varia de 1 dia a 1 mês, onde instituições financeiras que alteram seus portfólios dinamicamente estabelecem períodos para o VaR mais curtos.

4 - Análise Empírica dos Modelos de Volatilidade

Após a descrição dos modelos de volatilidade determinística e estocásticas esta seção consiste no estudo empírico do trabalho onde são estimados os modelos e feita a comparação entre eles de acordo com a análise de valor em risco. Na seção 4.1 são apresentadas as séries que serão estudadas: a taxa de cambio, o índice da bolsa de valores de São Paulo – IBOVESPA, e índice de preços ESALQ/CEPEA para a soja em grão. Na seção 4.2, são estimados os modelos de volatilidade, e dos modelos determinísticos e modelo de volatilidade estocástica são feitas comparações pelo *backtest* na seção 4.3.

4.1 – Descrição dos Dados

Nesta análise de comparação dos modelos de volatilidade determinística e estocástica são usadas séries com características distintas, com diferentes particularidades econômicas, sendo todas variáveis financeiras que estão expostas a incerteza, volatilidade e especulação. Uma das séries estudadas é a taxa de câmbio comercial R$/US$; outra é o índice IBOVESPA que vem sendo objeto de estudo em diversos trabalhos apresentando um comportamento volátil subjacente; e os preços da soja em grão que é de grande importância para o Brasil, sendo responsável em parte pelo bom desempenho do agronegócio nacional anterior a crise atual. Para todas estes séries considero todas as observações disponíveis para período de análise de 03/01/2000 até 10/06/2009, diferenças no número de observações são resultantes de períodos de transação distintos.

A taxa de cambio utilizada é a taxa de câmbio comercial para compra, sendo maior alvo de negociação que alternativas como o câmbio paralelo ou o turismo. A taxa de câmbio consiste no preço em unidades monetárias da moeda doméstica de uma unidade monetária de moeda estrangeira, no caso considero a taxa de cambio R$ por dólares americanos, US$. Outra série financeira estudada é o índice BOVESPA que é um importante indicador do estado do mercado financeiro, consistindo numa composição de carteira distribuída pelos papeis de diferentes empresas que participam do mercado acionário. O índice da bolsa traduz o retorno do mercado.

Para o comportamento do preço da soja em grão emprego o indicador da soja CEPEA /ESALQ o qual é um padrão de referência de preço para a soja tipo exportação conforme padrão estabelecido pela CONCEX[6] para a saca de 60 Kg (R$/saca), referente a negociação de mercado físico em lote entre as empresas, para região de referência como o estado do Paraná com periodicidade diária[7].

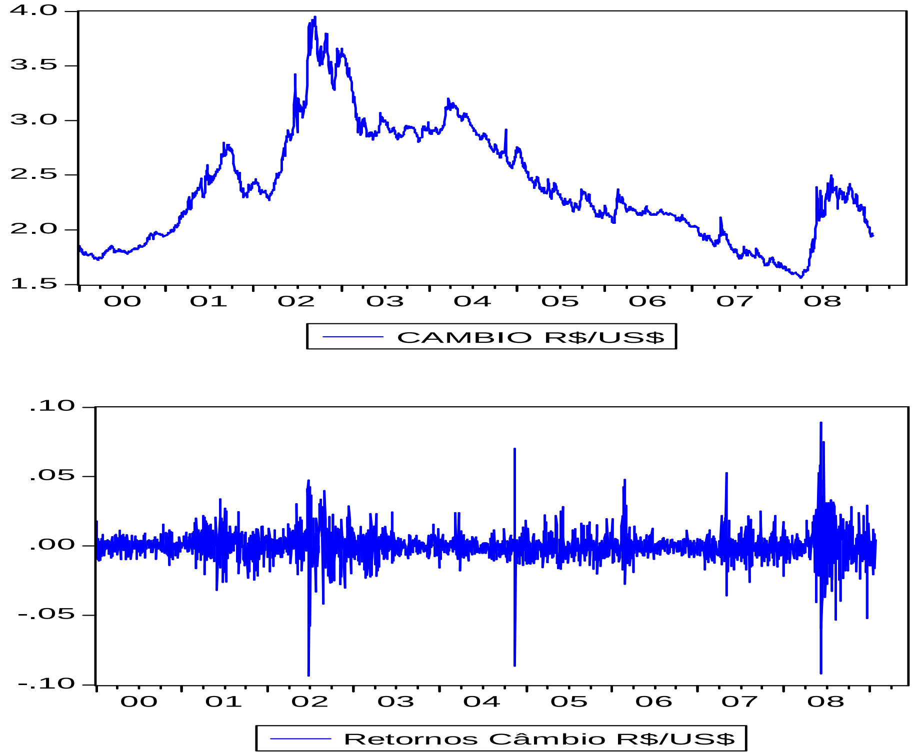
Para modelar a volatilidade no estudo destas séries financeiras utilizo os retornos ao invés dos preços dos ativos. As séries de retornos possuem melhores propriedades estatísticas[8] que os preços e são livre de escala. Sendo os retornos definidos na forma de log retorno como a primeira diferença do logaritmo natural do nível de preço do ativo i, dado por: $r_{i,t} = \log(p_{i,t}) - \log(p_{i,t-1})$
, para i = 1, 2 e 3, respectivamente taxa de câmbio, índice IBOVESPA e indicador CEPEA/ESALQ para preço da soja.

Todas as séries consideradas nesta análise são series financeiras com distintas características de volatilidade, sendo umas mais voláteis que outras. Apesar de possuírem características de comportamento próprias também demonstram movimentos comuns em resposta a choques que afetam a economia como um todo, como a atual crise do Sub-prime que se reflete num comportamento mais instável para todas as séries no final do período de análise.

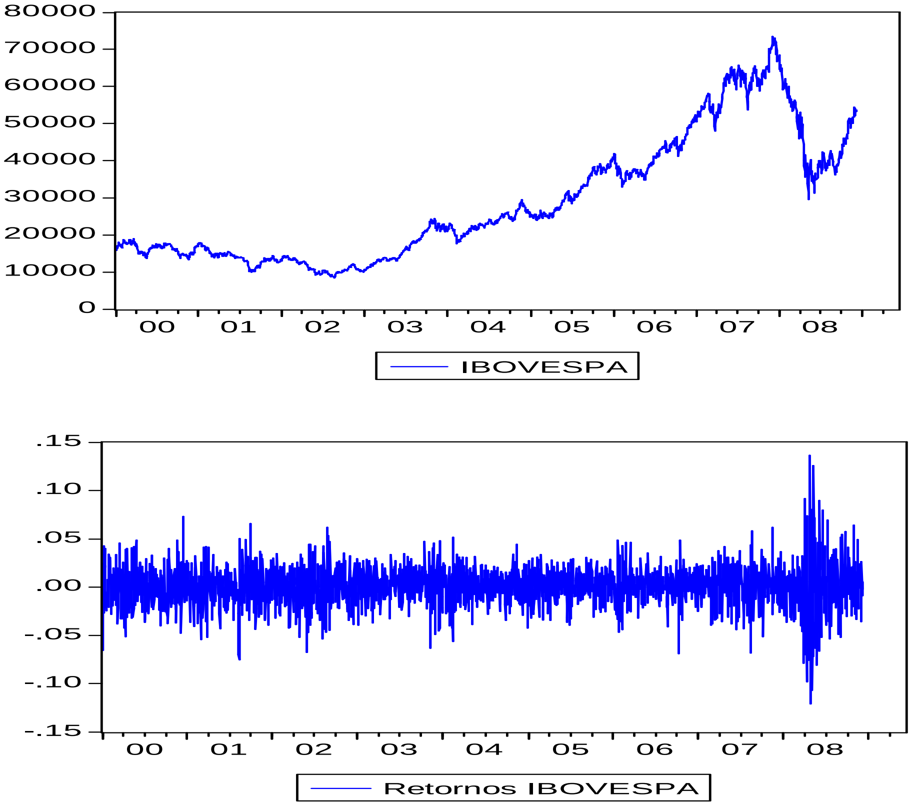
No gráfico 1 (a) o nível da série de cambio possui um comportamento em saltos alternando períodos de mudanças gradual com movimentos abruptos. Isto é próprio de um mercado sujeito a especulação e intervenções governamentais pontuais. Mudanças grandes na taxa de cambio refletem cenários de grande incerteza e risco para a economia, geralmente associadas a problemas econômicos de maior dimensão como a crise financeira desde o final de 2008. Este comportamento se reflete no movimento dos retornos para a taxa de câmbio, que possui observações extremas (*outliers*), bem como acomoda longos períodos de retornos de pequena magnitude.

[6] Soja em grão a granel, tipo exportação até 14% de umidade, até 2% de impurezas, e limites máximos de 8% para grãos avariados (até 5% de ardidos) e 30% de grãos quebrados.
[7] Para mais detalhes ver site do CEPEA.
[8] Todas as séries consideradas em nível são não estacionárias e se tornam estacionárias após a primeira diferença.

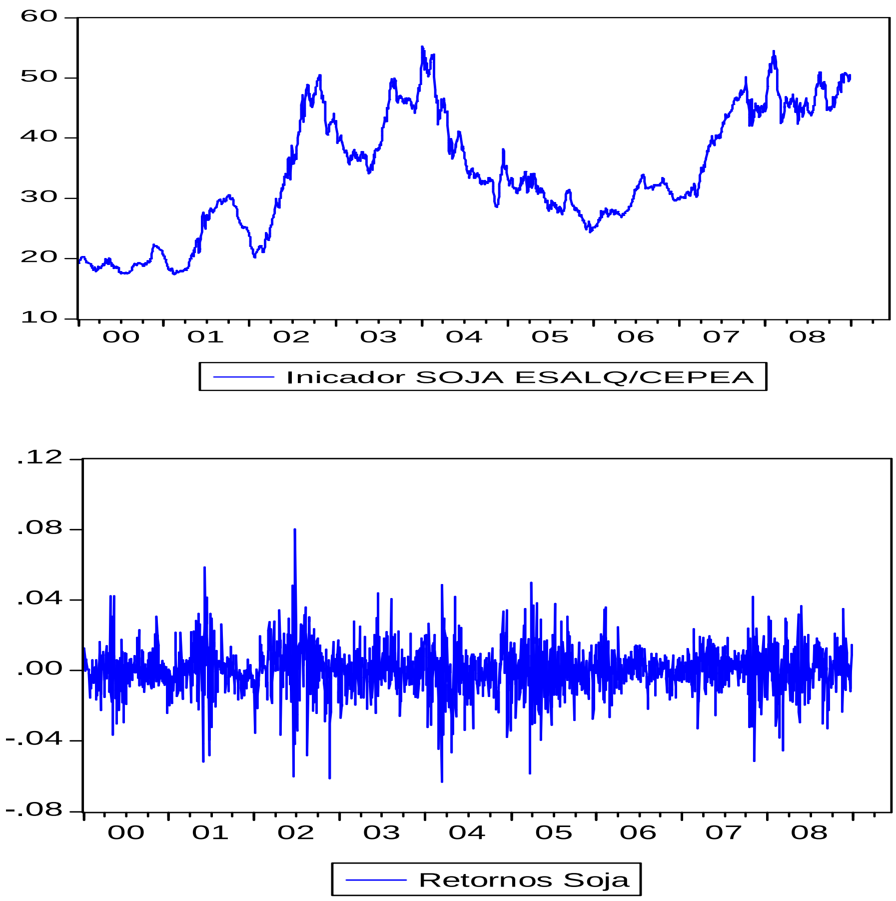
Gráfico 1 – Series em Retornos e Nível: Câmbio R$/US$, IBOVESPA, índice CEPEA/ESALQ para Soja em Grão.



(a)



(b)



(c)

Para os retornos do IBOVESPA até antes do segundo semestre de 1998 temos um cenário prospero para a bolsa de valores, acompanhado por um cenário de abertura econômica e prosperidade no comercio internacional [Gráfico 1 (b)]. No entanto, a atual crise fez o índice da bolsa recuar em 60% da cotação entre 15/05/2008 e 27/10/2008. Temos uma clara quebra estrutural, e após este período segue um processo de recuperação continuado. Fora este evento extremo, que leva a um aglomerado de volatilidade no final da série de grande magnitude, no resto do período seu comportamento é mais estável.

Os preços da soja por sua vez têm o comportamento mais instável, ver gráfico 1 (c). Os mercados de produtos agrícolas possuem muita irregularidade com a presença de fatores climáticos, pragas e de mercado internacional que afetam os preços adicionado efeitos de sazonalidade dos preços, e efeito de safras e entre safras.

Estas séries apresentadas acima reproduzem alguns fatos estilizados dos retornos financeiros, com média ao em torno de zero; clusters de volatilidade, com períodos de estabilidade sendo alternados por maior adensamento de retornos, com maior volatilidade proporcionando mais alta volatilidade. Em que pode-se notar que os retornos de câmbios são mais estáveis porém seguidos de maior número de observações aberrantes; o retorno para o índice IBOVESPA alterna agrupamentos de estabilidade e instabilidade, que fora o final da série não possui eventos extremos; e os retornos para a cotação da soja apresentam inúmeros clusters de alta volatilidade ao longo de todo período.

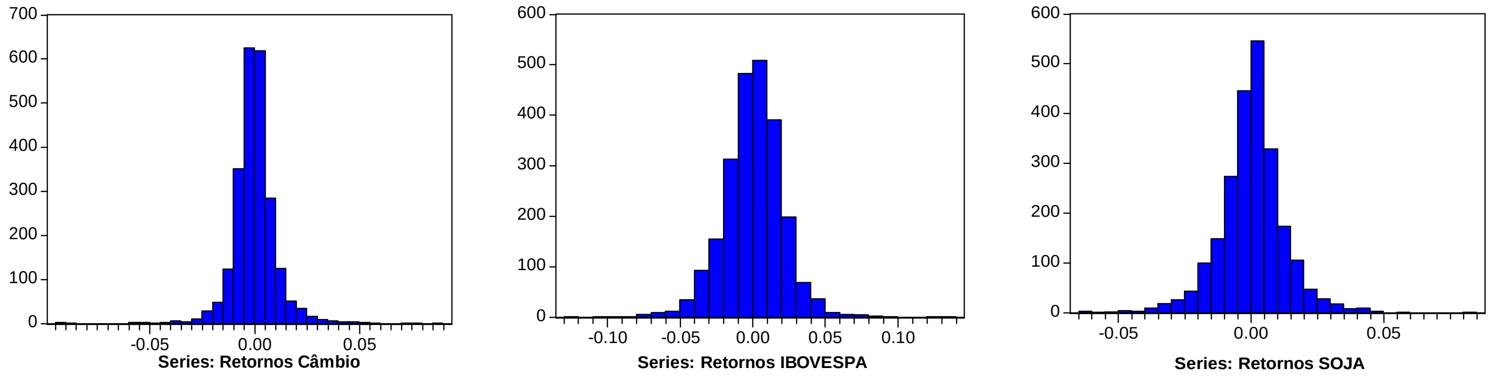
Uma análise mais detalhada do comportamento das séries é dada pela tabela de estatísticas descritivas a seguir (Tabela 1) e os histogramas no (Gráfico 2). As séries em comum possuem média ao redor de zero e são muito próximas de simétricas, com coeficiente de assimetria perto de zero. No entanto existe um comportamento distinto em termos de instabilidade. Em termos do histograma fica caracterizado o comportamento distinto de volatilidade das séries: o cambio exibe uma histograma mais afilado, e com retornos mais próximos da média, isto é representado do por sua curtose elevada 15,9 que caracteriza distribuições leptocúrticas combinado seu desenho afilado com caudas longas, a distribuição normal como referência possui curtose 3. Os retorno IBOVESPA e da soja também possuem excesso de curtose, com esta estatística em torno de 6. Desta forma, em todas as séries temos maior probabilidade de valores extremos. O desvio padrão indica como menos volátil o cambio, seguido com maior volatilidade os preços da soja e os retornos IBOVESPA. No entanto, o comportamento que leva a maior risco no controle do movimento dos retornos é a maior freqüência de valores mais afastados da média e nesta perspectiva colocam-se como mais voláteis na ordem para maior volatilidade como cambio, IBOVESPA e preços da soja.

A escolha destas séries vai de encontro ao objetivo de compara o desempenho dos modelos de volatilidade determinística e estocástica. Pois, os modelos terão que apresentar limites para perdas extremas com dado nível de confianças, para situações distintas. Em alguns casos um modelo com maiores intervalos VaR pode resultar mais adequado, enquanto em outras circunstâncias um modelo com um intervalo de valores limites mais estreito seja mais indicado. Este estudo será desenvolvido na seção 4.3.

Tabela 1 – Estatísticas Descritivas dos Retornos: Taxa de Câmbio, IBOVESPA e Preços da Soja em Grão.

	Retornos Câmbio	Retornos IBOVESPA	Retornos SOJA
Mean	3.30E-05	0.000492469	0.000412586
Median	-0.000243703	0.001212541	0.000673374
Maximum	0.089203259	0.136766116	0.080178365
Minimum	-0.093616242	-0.120960515	-0.063280334
Std. Dev.	0.01082233	0.020566206	0.012477077
Skewness	-0.101185302	-0.079789115	-0.113218098
Kurtosis	15.95175704	6.33475544	6.19456292
Jarque-Bera	16548.18659	1083.489824	1002.573422
Probability	0	0	0
Sum	0.078130943	1.148929521	0.967927538
Sum Sq. Dev.	0.277112585	0.98636335	0.365063649
Observations	2367	2333	2346

Gráfico 2 – Histogramas Dos Retornos: Taxa de Câmbio, IBOVESPA e Preços da Soja em Grão.



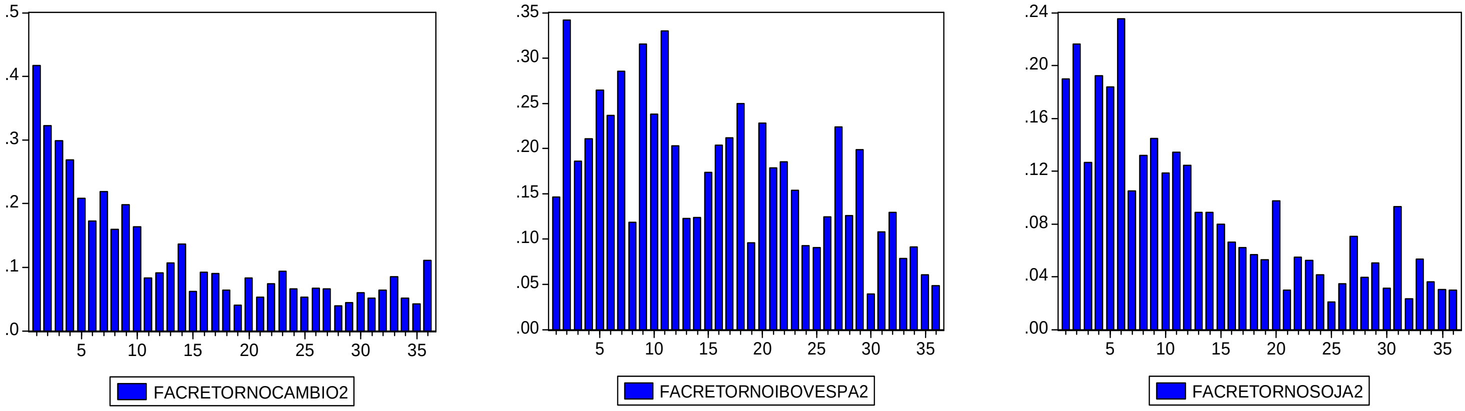
(a) (b) (c)

4.2 – Estimações dos Modelos de Volatilidade Determinística e Estocástica

Nesta seção estimamos os modelos de volatilidade determinísticas, como modelos GARCH, e os modelos de volatilidade estocásticas. Estas são as duas principais formas de estimar a volatilidade pelo emprego de métodos paramétricos.

Na análise de volatilidade o quadrado dos retornos é um estimador não enviesado da volatilidade, condicionado ao conjunto de informação do período prévio. Associados as características dos retornos financeiros que evidenciam volatilidade, como destacado na seção anterior, a séries temporais consideradas apresentam as propriedades estatísticas de correlação nos quadrados dos retornos (Ver gráfico 3) que descreve os clusters de volatilidade. Ainda, a queda lenta na correlação dos quadrados dos retornos denota a presença de volatilidade com longa memória (CAVALCANTE, 2007).

Gráfico 3 - Função de Autocorrelação para o Quadrado dos Retornos: Câmbio, IBOVESPA e Preços da Soja.



(a) (b) (c)

Os modelos de volatilidade determinística estimados são os modelos GARCH(1,1) sendo uma especificação parcimoniosa geral que é adequado para grande número de séries temporais com volatilidade (Tabela 2). Para todas as séries de retornos a especificação de modelo para a equação da média eliminou a correlação linear nos erros, para os modelos da equação da média que variam de um modelo de média móvel para o câmbio, sendo uma constante para o retorno IBOVESPA e um polinômio auto-regressivo incompleto para os preços da soja. Para a equação da média os coeficientes são significativo maior que ao nível de significância de 4%.

Tabela 2 – Modelos de Volatilidade Determinística – GARCH(1,1)

(1) *RETORNOSCÂMBIO* = 0.132061 ε_{t-1}
z-statistic (p-value) 5.6529 (0.0000)

$h_t =$	0.000003 +	$0.1802X^2_{t-1}$ +	$0.7970h^2_{t-1}$
p-value	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)

Estatísticas

Q(10) = 6.5009 (0.689), Q(20) = 20.45 (0.368) ; Q_2(10) = 4.8014 (0.851) , Q_2(20) = 5.6147 (0.999) ; ARCH-LM(12) = 4.9914(0.9583) ; Adjusted R-squared= -0.009131, Log likelihood= 8026.483, AIC = -6.7786, SBC = -6.7688; DW = 2.1899

(2) *RETORNOSIBOVESPA* = 0.0010
z-statistic (p-value) 2.70101(0.0069)

$h_t =$	0.0000104 +	$0.0686X^2_{t-1}$ +	$0.9039h^2_{t-1}$
p-value	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)

Estatísticas

Q(10) = 9.9057 (0.449), Q(20) = 25.778 (0.173) ; Q_2(10) = 9.7616(0.462) , Q_2(20) = 19.45 (0.493) ; ARCH-LM(12) = 10.039 (0.6126) ; Adjusted R-squared= -0.0020, Log likelihood= 5953.372, AIC = -5.1001, SBC -5.0903; DW = 1.9522

(3) *RETORNOSSOJA* = $0.2892r_{t-1} +$ 0.0437 r_{t-4}
z-statistic (p-value) 13.9087 (0.0000) 2.10201(0.0355)

$h_t =$	0.0000025 +	$0.0942X^2_{t-1}$ +	$0.8909h^2_{t-1}$
p-value	(0.0000)	(0.0000)	(0.0000)

Estatísticas

Q(10) = 12.753 (0.121), Q(20) = 24.817 (0.13) ; Q_2(10) = 6.0905 (0.637) , Q_2(20) = 11.627 (0.866) ; ARCH-LM(12) = 6.3218 (0.8989) ; Adjusted R-squared= 0.0807, Log likelihood= 7288.771, AIC = -6.2201, SBC = -6.2078; DW = 1.9746

Nota: Q_k(n) denota a estatística Lijung-Box para a série dos erros k=1, e para a série dos erros ao quadrado k=2.

Nos modelos GARCH a volatilidade é função dos retornos e da volatilidade passada. Nos modelos de volatilidade estimados a volatilidade passada proporciona mais efeito na volatilidade contemporânea que os retornos prévios, $\beta_1 > \alpha_1$, com este efeito sendo menor para o câmbio. Para a equação da variância avaliamos a persistência dos choques sobre a volatilidade pela soma dos coeficientes ARCH e GARCH, cuja soma sendo igual a unidade - $\alpha_1 + \beta_1 = 1$, caracteriza o modelo IGARCH. Para o cambio a soma dos coeficientes é 0.9772; para os retornos IBOVESPA 0.9725 e para os preços da soja 0.9851. Demonstrando a característica de alta volatilidade das séries onde a série com volatilidade mais presente sendo para os retornos do preço da soja.

Os modelos de volatilidade estocásticas são uma abordagem de modelos de volatilidade no arcabouço dos modelos estruturais de série de tempo ou modelos de séries de tempo com componentes não observáveis, sendo a volatilidade um componente da série temporal. Enquanto os modelos de volatilidade determinística são modelos que especificam a volatilidade como uma função determinística dos retornos passados.

Nos modelos estruturais de série de tempo a evolução da série temporal ao longo do tempo é descrita em termos de componentes que tem uma interpretação direta e que são flexíveis o bastante, permitindo acomodar as alterações de comportamento da série temporal como: tendência, sazonalidade, ciclo e irregularidade.[9] Enquanto nos modelos determinístico descrevem uma relação da variável ao longo do tempo que captura seu comportamento médio, apesar de permitir boas aproximações as relações entre as variáveis recorrentemente têm uma dinâmica que não é constante ao longo do tempo.

No modelo de volatilidade estocástica ou variância estocástica a volatilidade é um componente não observável da série de retornos, os quais possuem como característica saliente apenas os clusters de volatilidade na forma de uma variação irregular ao longo do tempo que se situa em torno de uma variação mais estável, na forma de variância heterocedástica. As características da volatilidade como componente da série temporal dependem de seu termo estocástico na especificação que governa a volatilidade como um processo estocástico. Sem o componente de perturbação a volatilidade é constante.

Na especificação da volatilidade estocástica esta pode ser um processo estacionário ou como não estacionário. Na forma de volatilidade não estacionária esta é um passeio aleatório como a volatilidade do período precedente e um termo de erro, de tal sorte que os choques sobre a volatilidade são persistentes e a volatilidade não estacionária acomoda um conjunto de choques passados em sua dinâmica, e flutua para cima e para baixo com o efeito de distúrbios cumulativos. Enquanto, que na volatilidade estacionária para a volatilidade como um processo autoregressivo com coeficiente menor que a unidade, os choques são amortecidos e temos uma dinâmica própria bem comportada.

Uma vez estimados os modelos de volatilidade determinística agora estimamos os modelos de volatilidade estocástica, apresentados na tabela 3. Para a estimação dos modelos estocásticos foi adotado o procedimento de inicialmente estimar um modelos ARMA para retirar a correlação linear dos retornos, usando-se a equação da média dos modelos de volatilidade determinística, e com este resíduo foi estimada a volatilidade estocástica.

Os modelos são caracterizados por seus hiperparâmetros σ_{ξ}^2 , σ_{η}^2 e α_1 e as medidas de ajuste p.e.v, AIC e SBC. Modelos com número de parâmetros diferentes devem ser comparados pelos critérios de informação; e a variância do erro e previsão é uma medida associada ao erro de previsão um passo a frente (HARVEY, 1989).

Para a taxa de cambio e os preços da soja o p.v.e., bem como os critérios de informação de Akaike e Bayesiano[10], indicam a volatilidade estocástica estacionária como a mais adequada. Para a série de retorno IBOVESPA os mesmo critérios demonstram que a volatilidade tem um comportamento não estacionário.

A taxa de cambio possui uma volatilidade com persistência com coeficiente autoregressivo da volatilidade 0.97 tal como a persistência no modelo determinístico, da mesma forma os preços da soja tem o mesmo coeficiente autoregressivo sobre a volatilidade que, no entanto indica menos persistência que no modelo GARCH, 0.971

[9] Os modelos estruturais de série de tempo permitem componentes tempo variantes, pois estes elementos possuem uma estrutura com erro, que acomoda choques.
[10] Modelo com Min. {AIC}, Min.{SBC}.

contra 0.985. O IBVOVESPA para o caso estacionário tem coeficiente sobre a volatilidade negativo próximo da unidade, e sua variância do erro muito baixa 0.0180 reproduz um comportamento de passeio aleatório que é o modelo mais adequado.

O teste de diagnóstico Lijung-Box sobre a ausência de correlação dos resíduos, indica que os modelos de volatilidade estocástica ajustados para a série de retornos do câmbio e da soja estão adequados não restando correlação nos erros, não se rejeitando a hipótese nula de que a correlação dos k primeiros resíduos é zero; enquanto o modelo de volatilidade estocástica para a série de retornos IBOVESPA demonstra correlação não capturada pelo modelo presente nos erros, de tal forma que, para esta série, o modelo possui um ajuste limitado.

Tabela 3 – Modelos de Volatilidade Estocástica Estacionários e Não-Estacionários

	Retornos Câmbio		*Retornos IBOVESPA*		*Retornos Soja*	
Estat.	**MVS estac.**	**MVS não-estac.**	**MVS estac.**	**MVS não-estac.**	**MVS estac.**	**MVS não-estac.**
	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
p.e.v.	2.7953	2.8232	3.3207	3.1998	3.1667	3.1984
AIC	1.0305	1.0396	1.2028	1.1648	1.1553	1.1643
SBC	1.0378	1.0444	1.2102	1.1697	1.1626	1.1693
α_1	0.9746	-	-0.8618	-	0.9714	-
σ_ξ^2	2.4765	2.5332	3.2556	3.0943	2.9001	2.9521
σ_η^2	0.0508	0.0300	0.0180	0.0036	0.0364	0.0192
q	0.0205	0.0118	0.0055	0.0012	0.0126	0.0065
Q(10)	6.24[0.5122]	9.54[0.2988]	139.96[0.0000]	30.32[0.0002]	8.42[0.2973]	10.63[0.2236]
Q(20)	16.18 [0.5108]	31.14[0.0277]	232.67[0.0000]	41.64[0.0012]	13.16[0.7254]	15.21[0.6476]

Nota: [ ], valor-p para a estatística Q de Lijung-Box.

Uma vez selecionados os modelos para a volatilidade, seja determinística ou estocástica, para as séries financeiras consideradas neste estudo a seção seguinte passa para comparação dos modelos em termos de valor em risco.

4.3 – Comparação do *Backtest* para o valor em Risco para Modelos de Volatilidade Determinística e Estocástica.

Existem diversas medidas de risco e o valor em risco é uma medida geral de risco usada no mercado financeiro tanto no âmbito das empresas, na sua gestão interna, quanto externamente, pelos órgãos reguladores. Os bancos centrais e outros órgãos reguladores exigem que as instituições financeiras mantenham reservas proporcionais ao valor em risco de suas aplicações e são empregados modelos para obter intervalos de confiança sobre as perdas financeiras (COSTA, BADYA; 2003).

O valor em risco é a maior perda que uma empresa espera incorrer sobre uma aplicação de investimento com dada probabilidade, ou nível de confiança $(1-\alpha)$. O valor em risco pode ser interpretado como um intervalo de confiança unilateral, onde os limites do intervalo de confiança são aleatórios e na construção de sucessivos intervalos de confiança eles contem o verdadeiro valor do parâmetro em $(1-\alpha)*100\%$. Como regra geral se emprega um nível de confiança de 95%, ver (J. P. Morgan Bank, 1999). A forma mais direta do *backtest* consiste em contar o número de exceções fora dos limites de confiança estabelecidos pelo VaR.

Na comparação dos modelos de volatilidade determinística e estocástica vou empregar o VaR, que seria uma medida de desempenho dos modelos de volatilidade em proporcionar intervalos sobre as possíveis perdas dos agentes que tem um sentido estatístico e significado econômico direto. O melhor modelo de volatilidade proporcionaria um valor em risco estreito e que tenha o menor número de violações sobre os limites previstos.

O valor em risco para os modelos de volatilidade estimados na seção anterior estão apresentados na tabela 4. Para a elaboração do VaR assumo a distribuição normal empregando os valores p-quantis da distribuição normal[11]. Os modelos de volatilidade determinística respeitaram o número de violações sobre o limite de perda de acordo com a probabilidade pré-estabelecida de 5%, uma violação a cada 20 dias comerciais aproximadamente. Para estes modelos, como nas séries que são diferentes em volatilidade e observações extremas nas caudas, o desempenho foi melhor sobre a série da taxa de cambio, para os retornos IBOVESPA apenas o valor em risco inferior foi violado em inexpressivo percentual além do nível de significância de 5%, e os limites para os preços da soja não respeitaram a freqüência prevista por reduzido acréscimo ao percentual de violações esperado.

Tabela 4 – Violações do Valor em Risco para Modelos GARCH e SV – número e percentual (%) em relação ao total de observações.

	Violações VaR_Low		Violações VaR_High	
Modelo	**No.**	**%**	**No.**	**%**
GARCHcambio	90	0.0380	107	0.04520
GARCHIbovespa	126	0.0540	100	0.04286
GARCHsoja	119	0.0508	120	0.05124
SVcambio	63	0.0266	84	0.03550
SVIbovespa	267	0.1144	289	0.12387
SVsoja	117	0.0499	117	0.04990

Nota: nível de confiança de 95% - porcentagem de violações esperada 5%.

Por sua vez, para os modelos de volatilidade estocástica[12] demonstram desempenho distinto no *backtest* entre os modelos estacionários e não-estacionários. Os modelos de volatilidade estocástica estacionários respeitam a porcentagem de violações de 5% para as séries financeiras do câmbio e da soja. Neste caso, para ambas as séries os modelos de volatilidade estocástica apresentam porcentagem de violações inferiores aos modelos determinísticos, para o câmbio o modelo de volatilidade estocástica responde com 2.66% e 3.55% contra modelo determinístico com 3.80% e 4.52%, para violações dos limites inferiores e superiores respectivamente; para os retornos da soja os resultados são mais próximos com 4.99% para violações do valor em risco no limite inferior e superior do modelo estocástico contra 5.08% e 5.12% do modelo

[11] Uma alternativa seria estimar os quantis empíricos.

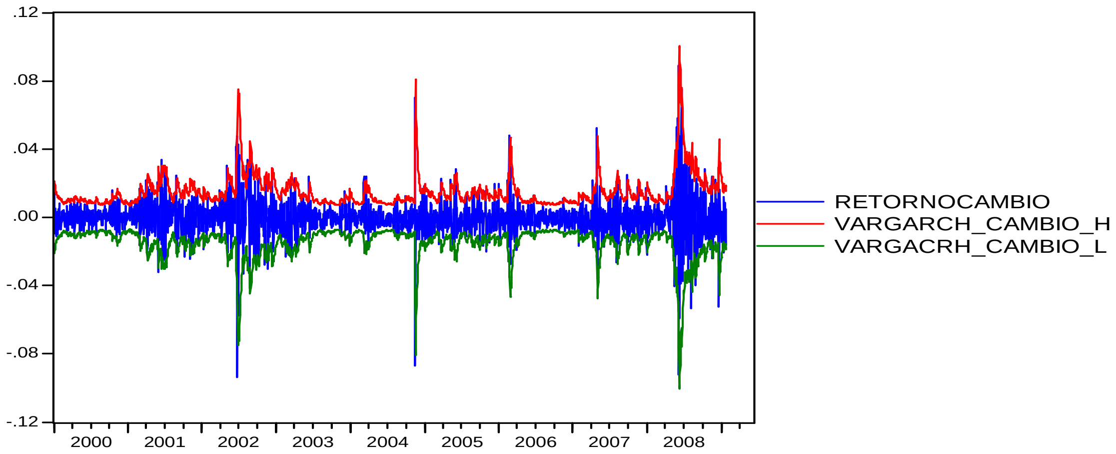
[12] Para o desvio-padrão da série temporal nos modelos de volatilidade estocástica uso a volatilidade filtrada.

determinístico, para os limites inferiores e superiores respectivamente. O desempenho menos favorável é para o modelo de volatilidade estocástica não-estacionário sobre os retornos IBOVESPA, com violações acima de 10% das observações realizadas seja para violações de intervalo superior ou inferior, cujo modelo estimado tem ajuste limitado.

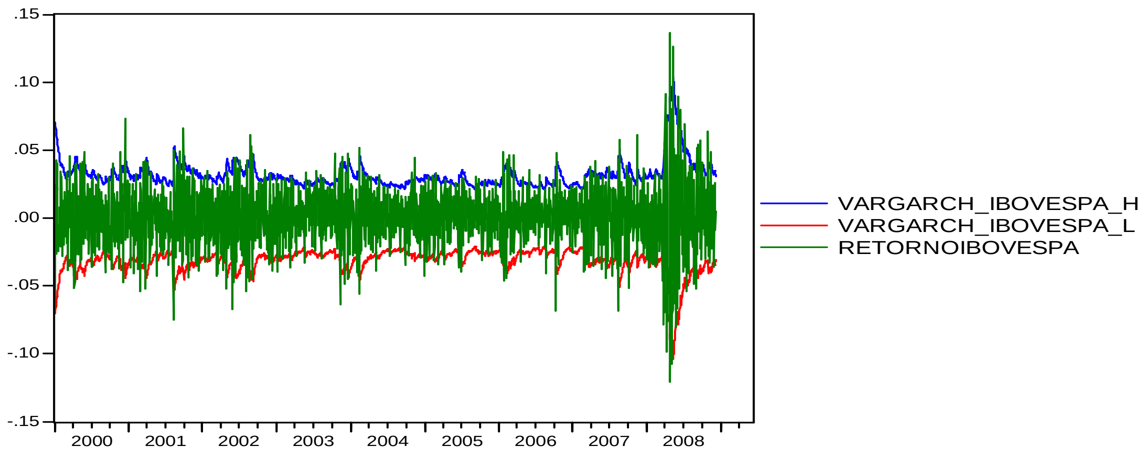
O melhor modelo de valor em risco seria aquele com menor intervalo de perda para os retornos e que respeitasse este intervalo. Assim, no backtest temos apenas a análise de verificação de se o valor em risco modelado respeita os limites de perda que o próprio modelo prediz. Os modelos de volatilidade determinística apresentaram desempenho superior ao modelo de volatilidade estocástica não-estacionário, enquanto os modelos de volatilidade estocástica estacionários demonstraram menor porcentagem de violações em relação aos modelos de volatilidade determinística.

Cabe notar que em séries mais estáveis em relação ao comportamento médio, com menos observações afastadas da média, para a série dos retornos do câmbio, os modelos de volatilidade estocástica permitiram menos violações, relativamente aos modelos determinísticos; enquanto que para séries com mais observações distantes da média, como a série dos retornos da Soja, apesar de menor porcentagem de violações para os modelos de volatilidade estocástica estas são muito semelhantes ao apresentado pelos modelos determinísticos.

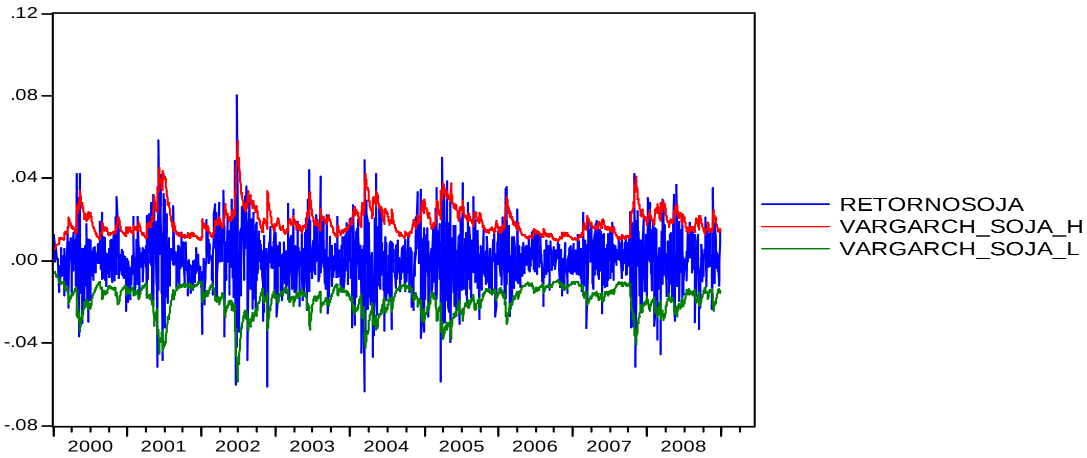
Gráficos 4 – Valor em Risco para Modelos GARCH: câmbio, IBOVESPA e Soja.



(a)

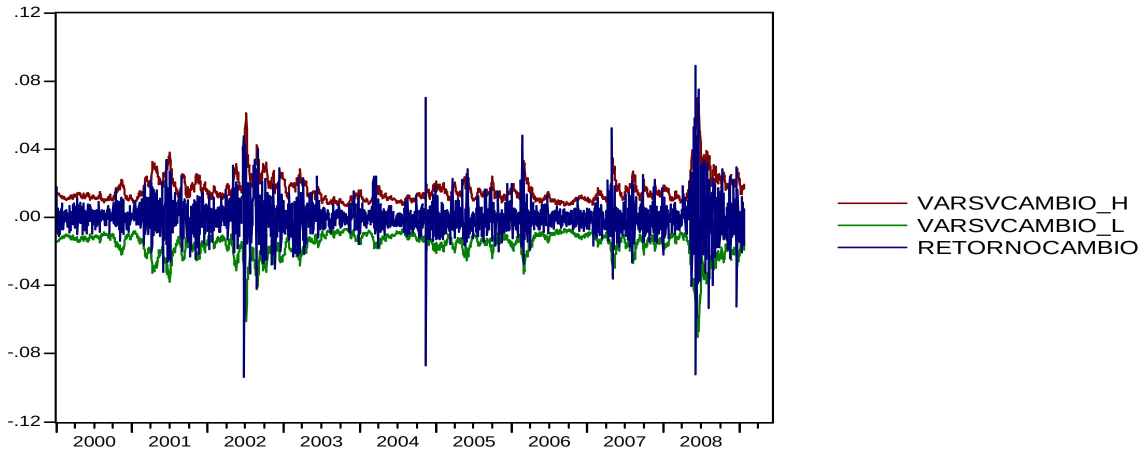


(b)

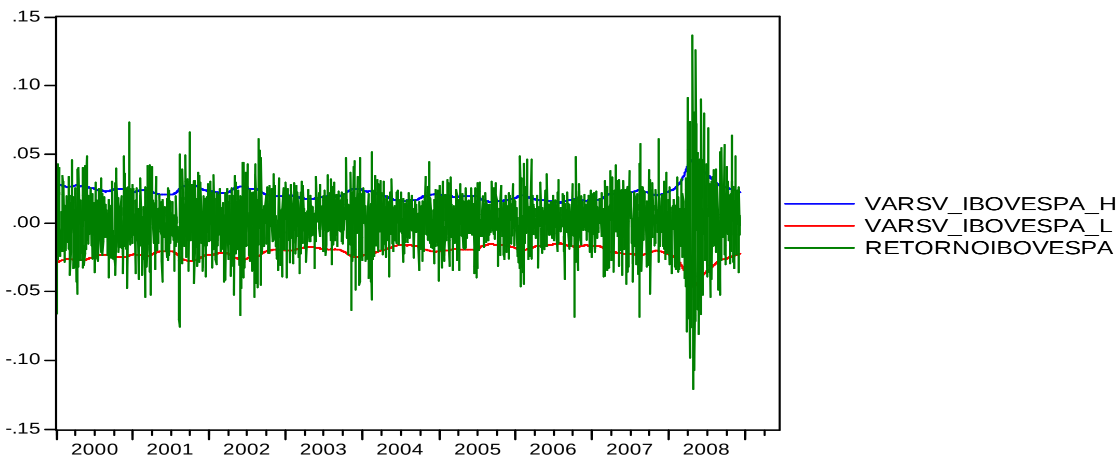


(c)

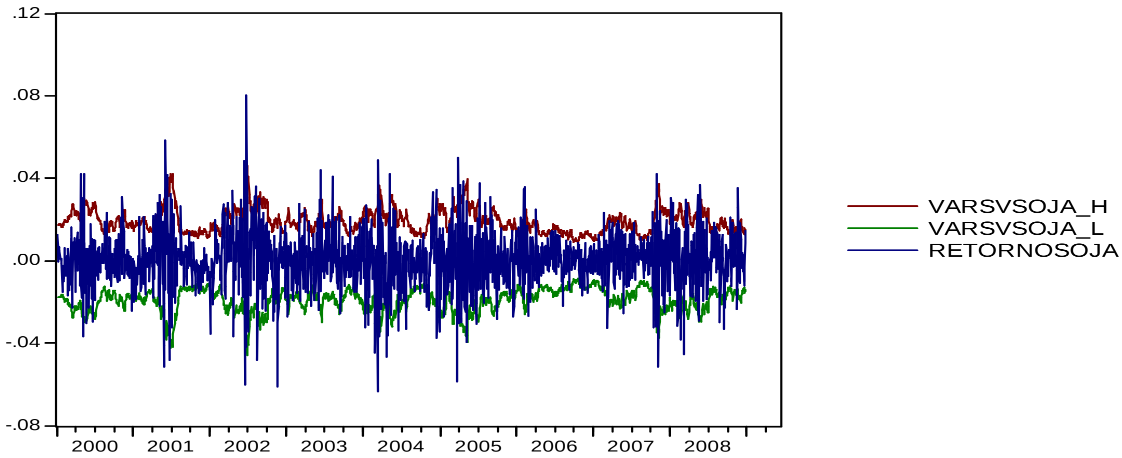
Gráficos 5 – Valor em Risco para Modelos de Volatilidade Estocástica: câmbio, IBOVESPA e Soja.



(a)



(b)



(c)

5 – Considerações Finais

Os modelos de estimação de volatilidade têm grande importância na análise de risco sendo empregados para medidas de risco bem como precificação de opções. De forma geral os principais modelos de volatilidade são os modelos determinísticos e estocásticos. Estudos anteriores já fizeram uma comparação destes modelos, neste trabalho tentei proporcionar uma contribuição ao debate usando para a avaliação o valor em risco que é amplamente usado no mercado financeiro para analisar a qualidade das posições de risco assumidas e conseqüentemente os limites de confiança proporcionados pelos modelos.

Para a comparação de estimadores as propriedades desejáveis são ausências de viés, com o estimador proporcionado um valor que em média é igual ao verdadeiro parâmetro populacional; e estimadores eficientes, com variância mínima, com conjunto de estimativas mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro; ademais buscamos estimadores consistentes[13]. Todavia, ao tratarmos com séries temporais temos modelos que tentam aproximar um conjunto de observações seguindo um processo estocástico e não parâmetros populacionais, e uma abordagem mais interessante é em termos de modelos com erro quadrático médio mínimo, como aproximação do conceito de viés, e intervalos de confiança mínimos que é mais próximo do conceito de eficiência.

Na análise dos modelos de volatilidade determinísticas feita por Morais & Portugal, (1999), demonstra o desempenho superior dos modelos de volatilidade determinística em relação ao modelo estocástico usando medidas de desempenho preditivo. Por sua vez, o presente trabalho se aproxima do estudo de Herência, et al (1998) que enfatiza a qualidade do ajuste por previsões dentro do intervalo de confiança e o comprimento destes. Embora não possamos dizer que os modelos de volatilidade estocástica serão sempre melhores este trabalho, considerando séries temporais com diferente comportamento de volatilidade, indica a maior sensibilidade dos modelos de volatilidade estocástica. Mais ainda, para séries com observações mais próximas da média, menos instáveis, os resultados sugerem melhor desempenho dos modelos de volatilidade estocástica em relação os modelos de volatilidade determinística.

[13] Para uma discussão de inferência estatística e das propriedades desejáveis dos estimadores ver KMENTA, (1988).

Uma extensão deste trabalho, para uma análise mais rigorosa sobre o desempenho relativo dos modelos de volatilidade determinística e estocástica, seria fazer um estudo do valor em risco substituindo os valores p-quantis de distribuições teóricas pelos valores p-quantis das distribuições empíricas estimadas.

Referências Bibliográficas

BILDIRICI, M. & ERSIN, O. O. Improving Forecasts of GARCH Family Models with the Artificial Neural Networks: An Application to the Daily Returns in Istanbul Stock Exchange. *Experts System with Applications,* v. 36, p.7355-7362, 2009.

BROTO, C.; ESTHER, R. Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey. *Journal of Economic Surveys*, v. 18, n.5, 2004.

CAVALCANTE, J. A Propriedade de Longa Memória na Volatilidade dos Retornos IBOVESPA. *Revista do BNDES*. Rio de Janeiro, v. 14, nº 27, p. 277-294, Jun., 2007.

COSTA, P. H. S.; BADYA, T. K. N. Métodos de Medição de Risco de Mercado: Um Estudo Comparativo. *Revista Produção,* v.13, n.3, 2003.

CUTHBERTSON, K.; HALL, S. G.; TAYLOR, M. P. *Applied Econometric Techniques.* UK, Harvester Wheatsheaf, 1992.

ENDERS, W. *Applied Econometric Time Series.* John Wiley & Sons, Inc. second edition, 2004.

ENGLE, R. Riesgo e Volatilidad: Modelos Econométricos e Prática Financeira. *Revista Asturiana de Economia – RAE*. nº 31, p. 221-252, 2004.

GALDI, F. C.; PEREIRA, L. M. Valor em Risco (VaR) Utilizando Modelos de Previsão de Volatilidade: EWMA, GARCH e Volatilidade Estocástica. *Brazilian Business Review,* v.4, n.1, p. 74-95, jan./abr., 2007.

HARVEY, A. C.; RUIZ, E.; SHEPARD, N. Multivariate Stochastic Variance Models. *Review of Economic Studies*, 61, p.247-264, 1994.

HARVEY, A. C. *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter.* Cambridge University Press, 1989.

HERENCIA, M. Z.; HOTTA, L. K.; PEREIRA, P. L. V. Filtragem e Previsão com Modelos de Volatilidade Estocástica *versus* GARCH. *Revista Brasileira de Economia,* 52 (2), p. 241-278, abr./jun., 1998.

J. P. MORGAN BANK. *Risk Management:* A Practical Guide. Riskmetriks Group, 1999.

J. P. MORGAN BANK. *Techinical Document*. Riskmetriks Group, 1999.

KMENTA, J. *Elementos de Econometria.* Ed. Atlas, 1988.

KOOPMAN, S. J.; HARVEY, A. C.; DOORNIK, J. A.; et al. *STAMP - Structural Time Series Analyzer Modeller and Predictor.* Timberlake Consultants ltd., 2000.

MOTA, B. DE Sá; FERNANDES, M. Desempenho de Estimadores de Volatilidade na Bolsa de Valores de São Paulo. *Revista Brasileira de Economia – RBE*. Rio de Janeiro, 58 (3), p. 429-448, jul/set, 2004.

MORAIS, I. A. C. DE; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do IBOVESPA. *Estudos Econômicos,* v.29, n.3, julho/setembro, 1999.

MORAIS, I. A. C. DE; PORTUGAL, M. S. Uma Investigação Sobre os Co-Movimentos na Volatilidade dos Par Bonds Latino-Americanos. *Revista Brasileira de Economia,* v.55, n.2, p. 183-204, abr./jun., 2001.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Blücher, 2004.

MORETTIN, P. A. *Econometria Financeira: Uma análise de Séries Temporais Financeiras*. São Paulo: Blücher, 2006.

TSAY, R. S. *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, Inc. second edition, 2005.