

Uma comparação entre intervalos de credibilidade e o intervalo de confiança clássico para o parâmetro da Distribuição de Poisson

Autores: Fernanda Nanci Scacabarozi (fernanda_scacabarozi@yahoo.com.br)
Carlos Alberto Ribeiro Diniz (dcad@ufscar.br)

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar, através de simulações, alguns intervalos de credibilidade para o parâmetro da distribuição de Poisson, construídos por meio de distribuições a priori não informativas e informativas efetuando comparações dos mesmos com o intervalo de confiança exato. Ou seja, desejamos verificar como estes intervalos se comportam com relação à probabilidade de cobertura e a amplitude média para diversos tamanhos amostrais e diferentes valores do parâmetro, e averiguar qual deles é melhor para cada situação.

Palavras-chave. Distribuição de Poisson, Intervalos de Credibilidade, Intervalos de Confiança.

1 Introdução

A distribuição de Poisson modela com sucesso uma grande variedade de situações cujo interesse reside no número de ocorrências de um determinado evento e é completamente determinada pelo conhecimento de um único parâmetro que representa, ao mesmo tempo, a média e a variância da variável que segue tal distribuição. Conseqüentemente, estimadores para este parâmetro são de extrema importância uma vez que refletem ao mesmo tempo o valor médio e a variabilidade dos dados.

Neste trabalho são estudados alguns estimadores intervalares para o parâmetro da distribuição de Poisson construídos utilizando técnicas da inferência Clássica e da Bayesiana. Intervalos de credibilidade, considerando distribuições a priori informativas e não informativas, são analisados através de simulações e comparados a um intervalo de confiança exato. O intuito é verificar como os intervalos de credibilidade se comportam com relação à probabilidade de cobertura e a amplitude média quando comparados ao intervalo de confiança clássico.

As prioris não informativas consideradas foram a distribuição exponencial, com grande magnitude de variância, e a priori não informativa de Jeffreys. Para determinar a influência do verdadeiro valor do parâmetro e do tamanho amostral, são geradas diferentes amostras aleatórias seguindo distribuição de Poisson com diferentes valores de parâmetro. No entanto, é comum o pesquisador dispor de algum conhecimento inicial sobre o parâmetro. Neste caso, tal conhecimento pode ser usado na especificação da distribuição a priori. Por esta razão, é de grande interesse avaliar como os intervalos de credibilidade, obtidos através de prioris informativas, se comportam quando comparados ao intervalo de confiança exato. Neste trabalho, comparamos a consistência do intervalo de confiança clássico com o intervalo de credibilidade construído utilizando a priori informativa $N(100;5)$. As amostras geradas neste específico estudo com prioris informativas seguem distribuição Poisson com parâmetro 100.

O artigo está organizado em quatro seções. Na seção 2 apresentamos a metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho. Na seção 3 apresentamos os resultados obtidos das simulações considerando todos os intervalos estudados. Finalmente, na seção 4 apresentamos as conclusões.

2 Metodologia

Nesta seção apresentamos a priori não informativa de Jeffreys para parâmetro da distribuição de Poisson e a construção dos intervalos de credibilidade e de confiança analisados.

2.1 Priori de Jeffreys

Uma classe de distribuições a priori bastante conhecida foi proposta por Jeffreys [colocar a citação] em 1961. Este grupo de prioris é invariante a transformações um a um, no entanto na maioria das vezes

possui prioris impróprias. A priori não informativa de Jeffreys para considerando que os dados tenham distribuição de Poisson é dada por $p(\theta) \propto \theta^{-\frac{1}{2}}$. Analisando o núcleo desta distribuição concluímos que esta priori é obtida tomando-se a conjugada natural fazendo-se $a = \frac{1}{2}$ e $b \rightarrow \infty$.

Na próxima seção apresentamos a forma geral do intervalo de credibilidade para o parâmetro da distribuição de Poisson quando a priori utilizada é uma Gama(a,b).

2.2 Intervalos de credibilidade para θ

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória da Distribuição de Poisson com parâmetro θ . Suponha que $\theta \sim \text{Gama}(a, b)$. A posteriori de $\theta|x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma distribuição Gama com parâmetros $a + \sum_{i=1}^n x_i$ e $\frac{1}{b} + n$. Ou seja,

$$p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \theta^{a+\sum_{i=1}^n x_i-1} e^{-\theta(\frac{1}{b}+n)}. \quad (1)$$

Assim,

$$p(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \theta^{\frac{2(\sum_{i=1}^n x_i+a)-1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}2(\frac{1}{b}+n)}. \quad (2)$$

Logo, $2(n + \frac{1}{b})\theta \sim \chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i+a)}$.

Como os limites do intervalo de credibilidade são os quantis da distribuição a posteriori para o parâmetro de interesse, para um nível de credibilidade $(1 - \alpha)$, temos o seguinte intervalo de credibilidade:

$$\left\{ \theta : \frac{\chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i+a); 1-\frac{\alpha}{2}}}{2(n + \frac{1}{b})} \leq \theta \leq \frac{\chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i+a); \frac{\alpha}{2}}}{2(n + \frac{1}{b})} \right\}. \quad (3)$$

Similar a construção anterior, o intervalo de credibilidade obtido utilizando a distribuição exponencial de parâmetro b é dado por:

$$\left\{ \theta : \frac{\chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i+1); 1-\frac{\alpha}{2}}}{2(n + \frac{1}{b})} \leq \theta \leq \frac{\chi^2_{2(\sum_{i=1}^n x_i+1); \frac{\alpha}{2}}}{2(n + \frac{1}{b})} \right\}. \quad (4)$$

Suponha agora que $\theta \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$, então a distribuição a posteriori de $\theta|x_1, x_2, \dots, x_n$ é proporcional a:

$$\propto \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-\left(\frac{\theta-\mu^2}{2\sigma^2}\right)+\theta\mu}. \quad (5)$$

A distribuição a posteriori encontrada para $\theta|x_1, x_2, \dots, x_n$ em (5) não segue nenhuma distribuição de probabilidade conhecida, logo não podemos encontrar os quantis exatos desta distribuição. Uma alternativa é a utilização do algoritmo de Metropolis-Hastings (ver Hastings[6],1970) que possibilita a geração de valores amostrais desta distribuição, e a partir destes valores encontramos os intervalos de credibilidade para θ .

2.3 O intervalo de confiança

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de variáveis iid $P(\theta)$. O método utilizado para construir o intervalo de confiança exato para o parâmetro θ emprega fundamentalmente a estatística discreta $T = \sum_{i=1}^n X_i$, onde $T \sim \text{Poisson}(n\theta)$, que possui função de distribuição acumulada $F_T(t|\theta) = P(T \leq t|\theta) = \sum_{k=0}^t \frac{e^{-n\theta} (n\theta)^k}{k!}$.

Sabemos que para qualquer estatística discreta T com função de distribuição acumulada $F_T(t|\theta) = P(T \leq t|\theta)$ podemos encontrar, $\theta_L(t)$ e $\theta_U(t)$, onde $\theta_L(t)$ e $\theta_U(t)$ são, respectivamente, os limites inferior e superior do intervalo de confiança $1 - \alpha$ para θ , tal que (ver Casela e Berger[4] pags 420-421,1990):

- Se $F_T(t|\theta)$ é uma função decrescente em θ para cada t temos que:
 $P(T \leq t|\theta_U(t)) = \frac{\alpha}{2}$ e $P(T \geq t|\theta_L(t)) = \frac{\alpha}{2}$ para $0 < \alpha < 1$ fixo.
- Se $F_T(t|\theta)$ é uma função crescente em θ para cada t temos que:
 $P(T \geq t|\theta_U(t)) = \frac{\alpha}{2}$ e $P(T \leq t|\theta_L(t)) = \frac{\alpha}{2}$ para $0 < \alpha < 1$ fixo.

No caso da distribuição de Poisson, tomando a estatística $T = \sum_{i=1}^n X_i$, temos que $F_T(t|\theta) = P(T \leq t|\theta) = \sum_{k=0}^t \frac{e^{-n\theta} (n\theta)^k}{k!}$ é uma função decrescente em θ .

Assim para encontrarmos o intervalo de confiança para θ utilizamos as seguintes igualdades:

$$P(T \leq t|\theta_U(t)) = \sum_{k=0}^t \frac{e^{-n\theta_U} (n\theta_U)^k}{k!} = \frac{\alpha}{2} \text{ e } P(T \geq t|\theta_L(t)) = \sum_{k=0}^t \frac{e^{-n\theta_L} (n\theta_L)^k}{k!} = \frac{\alpha}{2}.$$

Considerando a relação existente entre a distribuição Gama e a distribuição de Poisson, ou seja, se $X \sim \text{Gama}(\lambda, \beta)$, λ inteiro, e $Y \sim \text{Poisson}\left(\frac{x}{\beta}\right)$ então para qualquer valor de x , $P(X \leq x) = P(Y \geq \lambda)$. De acordo com a primeira igualdade temos que:

$$\begin{aligned} P(T \leq t|\theta_U) &= 1 - P(T > t|\theta_U) = 1 - P(T \geq t|1/\theta_U) \\ &= 1 - P(X \leq 2n\theta) = P(X \leq 2n\theta_U) = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

com $X \sim \text{Gama}\left(\frac{2(t+1)}{2}, 2\right)$, ou seja, $X \sim \chi_{2(t+1)}^2$ e $T \sim \text{Poisson}(n\theta)$. Desta forma, $2n\theta_U$ é o α -ésimo quantil superior de uma distribuição qui-quadrado com $2(t+1)$ graus de liberdade, ou seja, $2n\theta_U \equiv \chi_{2(t+1), \alpha/2}^2$, logo $\theta_U = \frac{1}{2n} \chi_{2(t+1), \alpha/2}^2$ representa o limite superior do intervalo de confiança $1 - \alpha$ para θ .

Tomando a segunda igualdade temos que:

$$P(T \geq t|\theta_L) = P(X \leq 2n\theta_L) = \frac{\alpha}{2},$$

com $X \sim \text{Gama}\left(\frac{2t}{2}, 2\right)$, ou seja, $X \sim \chi_{2t}^2$, $T \sim \text{Poisson}(n\theta)$. Assim, $2n\theta_L$ é o α -ésimo quantil inferior da distribuição qui-quadrado com $2t$ graus de liberdade, ou seja, $2n\theta_L \equiv \chi_{2t, \alpha/2}^2$, logo $\theta_L = \frac{1}{2n} \chi_{2t, \alpha/2}^2$ representa o limite inferior do intervalo $1 - \alpha$ para θ .

3 Resultados

3.1 Intervalos de credibilidade utilizando prioris não informativas

Uma maneira relativamente simples de definir distribuições a priori não informativas é escolher distribuições de forma que o parâmetro de interesse possua uma variância bastante elevada. Neste trabalho, utilizamos uma distribuição a priori não informativa construída desta forma: A priori Exponencial (20). Utilizamos também a priori não informativa de Jeffreys que neste caso é a Gama(a,b) com $a = \frac{1}{2}$ e $b \rightarrow \infty$. Valores a partir de 1000000 para o parâmetro b foram utilizados na simulação e os resultados obtidos foram os mesmos, assim apresentamos apenas o resultado obtido para b=1000000.

Com o objetivo de verificar a probabilidade de cobertura e a amplitude média dos intervalos estudados foram geradas 1000 réplicas para cada valor inteiro do parâmetro θ dentro do intervalo (10,100). A simulação foi repetida para tamanhos amostrais $n=10, 50$ e 100 . Fixando α em 5%, cada um dos intervalos apresentados nas seções 2.2 e 2.3 foi calculado em todas as réplicas.

Para comparar o intervalo de confiança clássico com os intervalos de credibilidade construídos utilizando prioris não informativas, são apresentados gráficos com a probabilidade de cobertura de ambos os intervalos para diferentes valores do parâmetro, o mesmo será feito para a amplitude média. Para verificar a influência do tamanho amostral na qualidade dos intervalos repetimos o processo para diferentes tamanhos amostrais. Nas Figuras de 3.1 a 3.1 encontramos os resultados obtidos da comparação entre o intervalo de confiança clássico e o intervalo de credibilidade construído por meio da priori Exponencial(20). Nas Figuras de 3.1 a 3.1 estão os resultados para a priori de Jeffreys.

A análise visual das Figuras 3.1 a 3.1 nos mostra que os intervalos de credibilidade obtidos por meio das prioris em questão possuem um comportamento bastante parecido quanto à probabilidade de cobertura e a amplitude média, como já era de se esperar, pois ambas as prioris são não informativas logo a única informação utilizada na construção dos intervalos é aquela contida nos dados.

Observamos que probabilidade de cobertura para o intervalo de confiança exato é sempre superior a probabilidade de cobertura dos intervalos de credibilidade estudados. Esta diferença é maior para amostras pequenas e diminui à medida que aumentamos o tamanho da amostra. No entanto, para amostras pequenas a amplitude média do intervalo de credibilidade é inferior a amplitude média do intervalo de confiança, esta diferença aumenta à medida que aumentamos o valor do parâmetro.



Figura 1: Probabilidade de Cobertura-Priori Exp(20) (a) e Amplitude Média-Priori Exp(20) (b)

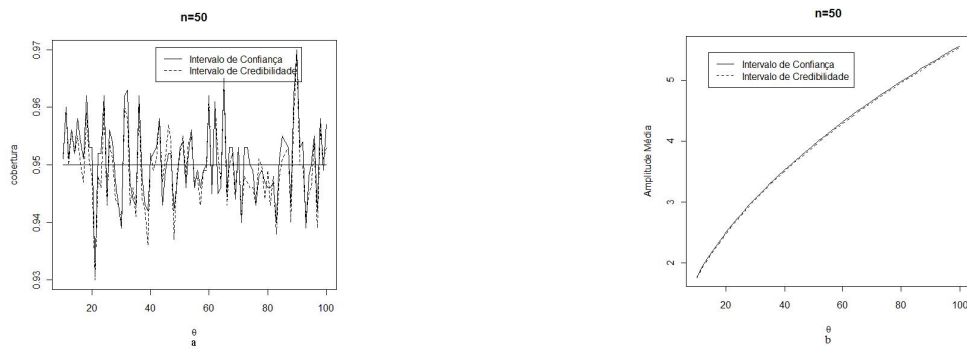


Figura 2: Probabilidade de Cobertura-Priori Exp(20) (a) e Amplitude Média-Priori Exp(20) (b)

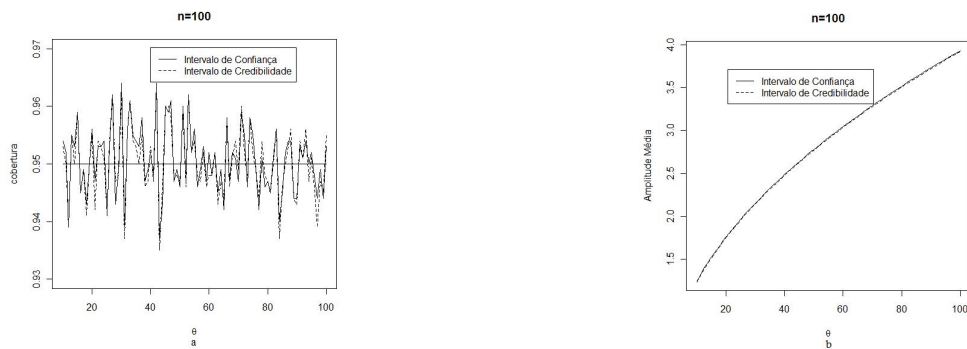


Figura 3: Probabilidade de Cobertura-Priori Exp(20) (a) e Amplitude Média-Priori Exp(20) (b)

3.2 Intervalo de credibilidade utilizando priori não informativa

Quando temos algum conhecimento sobre o parâmetro podemos traduzir esta informação por meio de distribuições a priori informativas. Para exemplificar este fato a seguinte simulação foi efetuada: Foram geradas 1000 amostras de $n=10, 50$ e 100 de uma variável aleatória seguindo distribuição de Poisson com parâmetro 100. Neste caso, a priori utilizada foi um Normal com média 100 e variância 5. Conforme os casos anteriores o intervalo de credibilidade resultante do uso desta distribuição a priori e o intervalo de confiança foram calculados em cada uma das réplicas com o intuito de comparar a probabilidade de cobertura e a amplitude média de ambos os intervalos. Os resultados obtidos estão na Tabelas de 1 a 3.

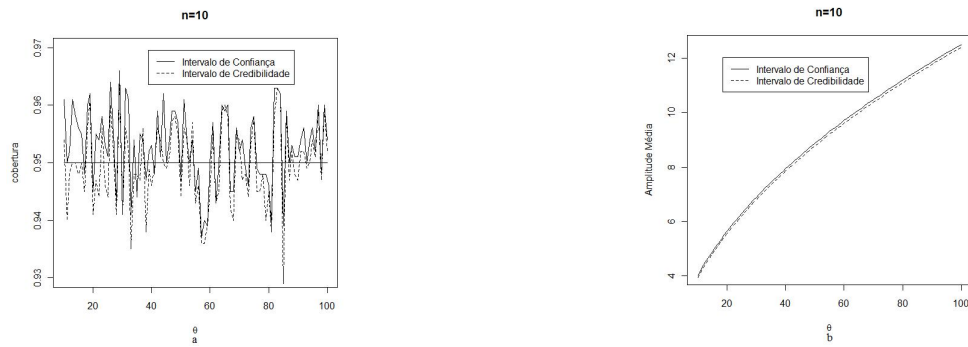


Figura 4: Probabilidade de Cobertura-Priori de Jeffreys (a) e Amplitude Média-Priori de Jeffreys (b)

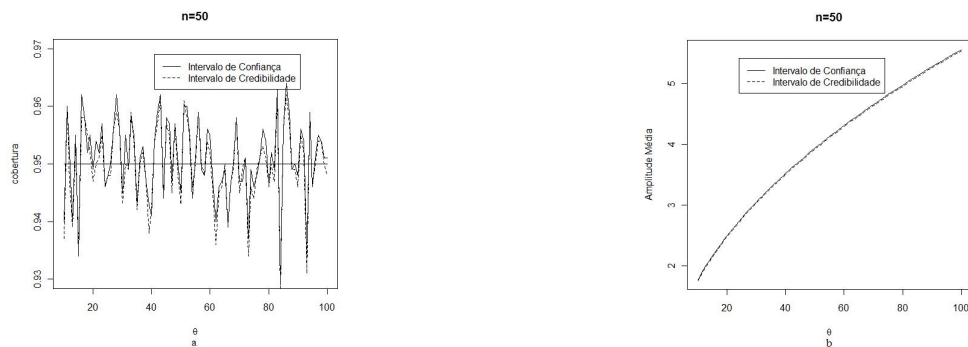


Figura 5: Probabilidade de Cobertura-Priori de Jeffreys (a) e Amplitude Média-Priori de Jeffreys (b)

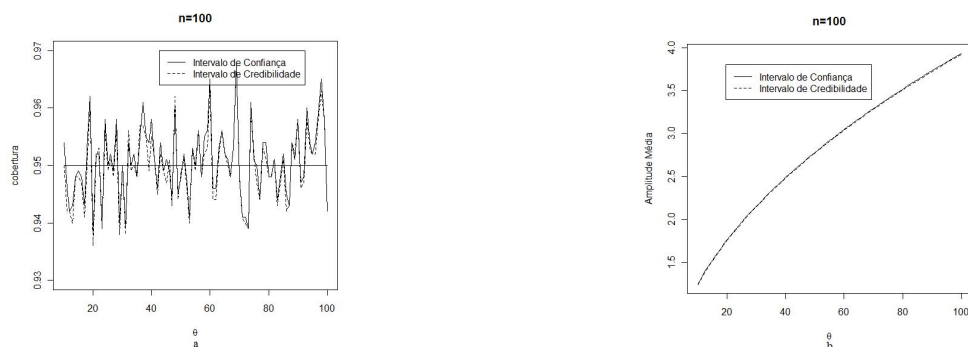


Figura 6: Probabilidade de Cobertura-Priori de Jeffreys (a) e Amplitude Média-Priori de Jeffreys (b)

Tabela 1: Resultados para amostras de tamanho 10.

	Intervalo de Confiança	Intervalo de Credibilidade
Probabilidade de Cobertura	0,939	0,973
Amplitude Média	12,49	10,36

Através dos resultados apresentados nas Tabelas 1 a 3 notamos que a probabilidade do cobertura dos intervalos de confiança e de credibilidade são bastante similares, no entanto, a amplitude média dos intervalos de credibilidade é inferior em todos os tamanhos amostrais analisados quando comparada a amplitude do intervalo de confiança.

Tabela 2: Resultados para amostras de tamanho 50.

	Intervalo de Confiança	Intervalo de Credibilidade
Probabilidade de Cobertura	0,947	0,949
Amplitude Média	5,56	0,07

Tabela 3: Resultados para amostras de tamanho 100.

	Intervalo de Confiança	Intervalo de Credibilidade
Probabilidade de Cobertura	0,952	0,953
Amplitude Média	3,61	0,03

4 Conclusões

Quando utilizamos prioris não informativas a probabilidade de cobertura do intervalo de confiança é sempre superior a dos intervalos de credibilidade estudados para qualquer tamanho amostral, no entanto, esta diferença diminui à medida que aumentamos o tamanho da amostra.

Em pequenas amostras, a amplitude amostral do intervalo de confiança é sempre maior que a dos intervalos de credibilidade. Para amostras moderadas e grandes a amplitude média é similar para intervalos de confiança e de credibilidade. Além disso, quando a amostra é pequena à medida que o valor do parâmetro aumenta a diferença entre amplitudes médias dos intervalos de confiança e de credibilidade também é ampliada. Assim, se o interesse for obter intervalos de confiança com amplitude baixa, nos casos em que o tamanho amostral é pequeno ou moderado, o mais indicado é o uso de algum dos intervalos de credibilidade estudados. Um aspecto importante decorrente do uso de prioris informativas na construção de intervalos de credibilidade é a diminuição significativa da amplitude média do intervalo.

Referências

- [1] G. Casela, R.L. Berger, “Statistical Inference”, California, 1990.
- [2] J. Berger, “Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis”, Springer-Verlag: New York,1985.
- [3] J. M. Bernardo, A. F. M. Smith, “Bayesian Theory”, Wiley: New York, 1994.
- [4] G. E. P. Box, G. C. Tiao, “Bayesian Inference in Statistical Analysis”, Wiley Classics Library ed. Wiley-Interscience,1992.
- [5] R. S. Ehlers, “Introdução a Inferência Bayesiana”, Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná, 2002.
- [6] A. O’Hagan, “Bayesian Inference”. Volume 2B. Edward Arnold, Cambridge, 1994.