# Um modelo estatístico para precificação de opções americanas utilizando simulação

**Vinícius C. N. Siqueira, Leandro T. L. de Souza, Vinícius V. Melo, Matheus Menes**

Departamento de Matemática Aplicada e Estatística,
ICMC, Universidade de São Paulo,
Caixa Postal 668, São Carlos, SP 13560-970, Brazil

2 de maio de 2010

## 1 Introdução

No Brasil, a primeira bolsa a transacionar contratos futuros foi a Bolsa de Mercadorias de São Paulo, em 1918. Já a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro, em 1979, foi a pioneira nas negociações no Mercado Futuro de Ações no Brasil. Porém, devido a um conjunto de fatores, suas atividades foram encerradas em 1986 em São Paulo e, no início de 1987 no Rio de Janeiro.

Em 2001 a BOVESPA mobilizou-se para implantar a negociação de futuro de ações no Brasil. Uma operação no Mercado Futuro de Ações da BOVESPA compreende a compra ou a venda de ações listadas em Bolsa para liquidação em uma data futura específica, previamente autorizada. Normalmente, o esperado é que o preço do contrato futuro de uma determinada ação seja equivalente ao preço a vista, acrescido de uma fração correspondente à expectativa de taxas de juros entre o momento da negociação do contrato futuro de ações e a respectiva data de liquidação do contrato.

Uma opção fornece ao comprador o direto de *fazer alguma coisa*. O comprador pode não exercer esse direito e permitir sua expiração. Obviamente, o comprador deve pagar pela compra da opção. Atualmente dois tipos de ações são negociados - as call options (direito de comprar) e as put options (direito de vender). O preço especificado no contrato é denominado *preço de exercício* ou *Strike Price*. Além disso, a data especificada no contrato é denominada *data de expiração* ou *maturidade*.

A opção Call fornece ao comprador o direito de comprar um ativo a um preço pré-fixado $K$ até um momento anterior à data da expiração, enquanto que uma opção put fornece ao comprador da opção o direito de vender o ativo específico a um preço pré-fixado até um momento anterior ao da data de expiração da opção. Em ambos os casos o comprador paga um preço por este direito e exerce ou não este direito caso seja vantajoso para ele. Atualmente diversos tipos de opções são comercializadas. As mais utilizadas são a American Option, que pode ser exercida em qualquer momento anterior a data de expiração e a European Option, que pode ser exercida somente na data de expiração. Associado a opções temos diversos problemas, tais como o desenvolvimento de um modelo que atenda as condições de mercado, a estimação dos parâmetros associados ao modelo, a precificação da opção (custo inicial), o desenvolvimento de uma estratégia de replicação (*hedging*), estudo da sensibilidade do valor da opção em relação ao valor do ativo (Greeks), entre outros. Neste trabalho vamos propor um modelo para o mercado e estudar o problema de precificação e replicação para opções americanas.

Utilizaremos a estratégia proposta por Leão e Ohashi [1] para aproximar funcionais de Wiener baseado em um processo de discretização aleatória para estabelecer um modelo para o mercado, bem como fórmulas para a precificação e replicação associadas ao mercado futuro de opções.

# 2 Metodologia

Para entender o modelo, vamos revisar alguns resultados obtidos por Leão e Ohashi [1]. Para $k \in \mathbb{Z}_+$, definimos $T_0^k = 0$ q.c. e

$$T_n^k = \inf\{T_{n-1}^k < t < \infty; |B_t - B_{T_{n-1}^k}| = 2^{-k}\}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

A família $(T_n^k)_{n\geq 0}$ é uma sequência de $\mathbb{F}$-tempos de parada para todo $k$, no qual os incrementos $\{T_n^k - T_{n-1}^k; n \geq 1\}$ formam uma sequência i.i.d. com mesma distribuição de $T_1^k$. Com isso, definimos a família de processos do tipo escada

$$A_t^k := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k}\theta_n^k 1\!\!1_{\{T_n^k \leq t\}}, \quad k \geq 1,$$

no qual

$$\theta_n^k = \begin{cases} 1 & ; \quad B_{T_n^k} - B_{T_{n-1}^k} = 2^{-k} \text{ and } T_n^k < \infty \\ -1 & ; \quad B_{T_n^k} - B_{T_{n-1}^k} = -2^{-k} \text{ and } T_n^k < \infty \\ 0 & ; \quad T_n^k = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Seja $(\mathcal{F}_t^k)_{t\geq 0}$ a filtração natural gerada por $\{A_t^k; 0 \leq t < \infty\}$.

Como foi mostrado em Leão e Ohashi [1] qualquer funcional de Wiener X, com energia finita, pode ser aproximado por semimartingales especiais com respeito a base estocástica $(\Omega, \mathbb{F}^k, \mathcal{F}^k, \mathbb{P})$. Vamos propor uma aproximação ao modelo de Blach e Scholes. Dado um $k$ fixo, vamos definir o mercado em relação a esta base estocástica. O processo solução forte da equação diferencial estocástica

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

é um funcional de Wiener. Então o processo $X^k$ pode ser representado por

$$X_t^k = X_0 + \int_0^t b_s^k ds + \oint_0^t D_s^k dA_s^k = X_0 + \int_0^t D_s^k dA_s^k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

no qual $\{b_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ é o processo de médias e o processo volatilidade estocástica $\{D_t^k : 0 \leq t \leq T\}$ corresponde a derivada estocástica do processo estocástico $X^k$ com respeito ao ruído branco $A^k$. Diferente do caso contínuo, o processo derivada estocástica $D^k$ caracteriza tanto a parte sistemática (média) quanto a parte martingale. No modelo de Black e Scholes tradicional, temos que $b_t = b$, $\sigma_t = \sigma$, com $b \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ constantes.

Como no modelo de Black e Scholes, considere um mercado composto por dois ativos (um com risco e outro sem) que são negociados continuamente. O ativo sem risco, denominado Bond e denotado por $S_t^{0,k}$ no tempo $t$, tem o processo de preço definido conforme a equação diferencial

$$\frac{\Delta S_{T_n^k}^{0,k}}{S_{T_{n-1}^k}^{0,k}} = r_{T_{n-1}^k}^k (T_n^k - T_{n-1}^k), \quad S_0^{0,k} = 1, n \geq 1. \tag{3}$$

cuja solução é dada pelo produto integrado

$$S_t^{0,k} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + r_{T_{n-1}^k}^k (T_n^k - T_{n-1}^k)\right] \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}}.$$

onde a família $\{T_n^k\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de $\mathbb{F}$-tempos de parada para todo $k$ dada pela discretização aleatória do movimento Browniano. Já o ativo com risco, denominado *stock* e denotado por $S_t^k$ no tempo $t$ tem o seu processo de preço modelado pela equação diferencial estocástica

$$\frac{\Delta S_{T_n^k}^k}{S_{T_{n-1}^k}^k} = D_{T_n^k}^k \Delta A_{T_n^k}^k, \quad S_0^k = s, \ n \geq 1. \tag{4}$$

que tem uma única solução dada por

$$S_t^k = s \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + D_{T_n^k}^k \Delta A_{T_n^k}^k\right] \mathbb{1}_{\{T_n^k \leq t\}}.$$

Considere um investidor que inicia sua aplicação nos dois ativos (*Bond* e *Stock*) com um investimento inicial $c > 0$. Assumimos que a transferência de dinheiro entre os ativos pode ser realizada a qualquer momento e sem custos transacionais. Além disso, os ativos são infinitamente divisíveis, isto é, o investidor pode comprar ou vender qualquer quantidade do ativo.

O processo portfolio $\pi = \{(\beta_t^k, \gamma_t^k) : 0 \leq t \leq T\}$ representa à quantidade de ativos comprados pelo investidor no tempo $t$, $\beta_t^k$ referente ao ativo sem risco e $\gamma_t^k$ referente ao ativo com risco. Desta forma, temos que $c = \beta_0^k S_0^{0,k} + \gamma_0^k S_0^k = \beta_0^k + \gamma_0^k$ e o capital do investidor no tempo $t$ é dado por

$$C_t^{\pi,k} = \beta_t^k S_t^{0,k} + \gamma_t^k S_t^k, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**Definition 2.1.** *Dizemos que um portfolio $\pi = \{(\beta_t^k, \gamma_t^k) : 0 \leq t \leq T\}$ é auto-financiável se*

$$\Delta\beta_{T_n^k}^k S_{T_{n-1}^k}^{0,k} + \Delta\gamma_{T_n^k}^k S_{T_{n-1}^k}^k = 0, \quad n \geq 1.$$

*ou seja, não há entrada de capital externo e nem saída do capital investido. A classe de todos os portfolios $\pi$ auto-financiáveis será denotada por $SF$.*

## 2.1 Precificação de opções americanas

Suponha que um investidor assina um contrato de uma opção americana que lhe fornece a opção de comprar, até um tempo especificado $T$, um lote do ativo com risco (*Stock*) a um preço pré-especificado K. Então o investidor tem a oportunidade de selecionar arbitrariamente um tempo de expiração que depende somente da filtragem $\mathcal{F}^k$ do mercado. Como a decisão desta questão resume-se a exercer a opção no tempo $\tau(\omega) = t \in \daleth_{0,T} = \{0; T_1^k(\omega); T_2^k(\omega); \ldots\}$ da discretização aleatória ou prolongar sua ação, isto é, considerar $\tau > t$, tal decisão deve ser determinada pela informação disponível até o tempo $t$. Portanto, é natural assumir que $\tau(\omega)$ é um tempo de parada. Sendo $\{f_t^k\}_{t\in[0,T]}$ a família de funções *payoff*, ou seja, o valor que o vendedor deve estar preparado para pagar ao investidor no tempo $t$, então o vendedor deve preparar suas estratégias $\pi$ de modo que a qualquer tempo $\tau = \tau(\omega)$ o capital correspondente $C_\tau^{\pi,k}$ não seja menor que $f_\tau^\pi$.

**Definition 2.2.** *Seja $c > 0$ e considere um conjunto dado de funções payoff $f^k = (f_t^k)_{0\leq t\leq T}$. Dizemos que uma estratégia $\pi = (\pi_t)_{0\leq t\leq T}$ é um $(c, f, T)$-hedge de tipo americano se, para qualquer $\omega \in \Omega$, $C_0^{\pi,k}(\omega) = c$*

*e, para todo* $0 \leq t \leq T$*,*

$$C_t^{\pi,k}(\omega) \geq f_t^k(S_t^k(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

*Ainda, se para algum tempo de parada* $\tau = \tau(\omega)$ *a igualdade ocorre, então o* $(c, f, T)$*-hedge* $\pi$ *é chamado de hedge mínimo.*

Considerando $\Pi(c, f, T)$ a coleção de todos os $(c, f, T)$-*hedges*, então o valor $\mathbb{C}_T^{*,k} = \inf\{c > 0 : \Pi(c, f, T) \neq \emptyset\}$ é chamado de preço justo de opções americanas com tempo de expiração $T$ e um sistema de funções payoff $f^k = (f_t^k)_{0 \leq t \leq T}$.

Então quais devem ser os tempos de parada $\tau$ nos quais um investidor deve exercer a sua opção?

Para responder a questão, consideramos que o preço da opção seja igual ao valor $\mathbb{C}_T^{*,k}$ definido acima. Se o investidor decidisse exercer sua opção no tempo $\tau$, então ele obteria o pagamento $f_\tau^k$. Suponha que existe uma estratégia de investimento $\pi$ auto-financiável com capital inicial $C_0^{\pi,k} = \mathbb{C}_T^{*,k}$ tal que no tempo $\tau$ o preço $C_\tau^{\pi,k}$ é estritamente maior que $f_\tau$. Se um investidor possui uma opção americana, escolhe $\tau$ como tempo de parada, ele estará agindo de maneira não razoável, já que se ele tivesse organizado um portfolio $\pi$, então no tempo $\tau$ ele teria o capital $C_\tau^{\pi,k}$ que é maior que $f_\tau^k$. Com isto, temos a seguinte definição

**Definition 2.3.** *Um tempo de parada* $\tau^* = \tau^*(\omega)$ *é chamado um tempo de expiração racional ou razoável da opção americana se para o capital inicial* $\mathbb{C}_T^{*,k}$ *para qualquer estratégia* $\pi \in SF$ *que tem a propriedade*

$$C_{\tau^*(\omega)}^{\pi,k}(\omega) \geq f_{\tau^*(\omega)}^k(S_{\tau^*(\omega)}^{\mathbb{C}_T^{*,k}}(\omega)) \quad \omega \in \Omega,$$

*a igualdade é válida.*

# 3 Resultados

A seguir, apresentamos uma versão do algorítmo de LongStaff and Schwartz [3] para determinar o preço justo de uma opção americana e a estratégia de *hedging*.

### 3.1 Algoritmo para precificação

O primeiro passo em nosso método de aproximação será substituir o problema de parada ótima original em tempo contínuo por um problema de parada ótima nos tempos de discretização aleatória $(T_n^k(\omega))_n$. Estamos interessados em calcular $\sup_{\tau\in\urcorner_{0,T}} E[f_\tau^k]$, no qual $(f_t^k)_{0\leq t\leq T}$ é processo *payoff* adaptado e $\urcorner_{j,T}$ denota o conjunto de todos os tempos de parada $\tau$, tal que $\tau > T_j^k$,.

Seguindo a teoria clássica (ver [2]), introduzimos o envelope de Snell $(U_t^k)_{0\leq t\leq T}$ do processo *payoff* $(f_t^k)_{0\leq t\leq T}$, definido por

$$U_j^k(\omega) = \text{ess-}\sup_{\tau\in\urcorner_{j,T}} E(f_\tau^k(\omega)|\mathcal{F}^k_{T_j^k}), .$$

Utilizando o princípio da programação dinâmica, segue que

$$\begin{cases} \tau_T = T \\ \tau_j = T_j^k \mathbb{1}_{f_j^k \geq E(f^k_{\tau_{j+1}}|\mathcal{F}^k_{T_j^k})} + \tau_{j+1}\mathbb{1}_{f_j^k < E(f^k_{\tau_{j+1}}|\mathcal{F}^k_{T_j^k})}, \quad 0\leq j\leq T-1 \end{cases}$$

A partir do tempo de parada é possível então precificar a opção americana. As aproximações serão realizadas via 2 métodos distintos. A primeira aproximação consiste em aproximar a esperança condicional com respeito a $Y_j^k$ (onde $(Y_j^k)_j$ é uma cadeia de Markov) pela projeção ortogonal do espaço gerado por um número finito de funções de $Y_j^k$ (algorítmo de LongStaff e Schwartz [3]) e a segunda aproximação consiste em calcular numericamente $E(f_\tau^k \mid \mathcal{F}^k_{T_j^k})$ via procedimentos de Monte-Carlo.

## Referências


[1] D. Leão and A. Ohashi, (2009). Weak approximations for Wiener functionals. *Preprint.*

[2] J. Neveu (1975) - Discrete-parameter Martingales. North Holland, Amsterdam.

[3] Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz, Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach, Review of Financial Studies 14, 113-148, 2001.