Uma interpretação frequentista alternativa dos intervalos de tolerância

Alessandra Querino da Silva – FACET - UFGD[1]
Marcelo Silva de Oliveira - DEX – UFLA[2]

Resumo: *Neste trabalho, foi proposta uma forma alternativa de interpretar intervalos de tolerância, baseando-se apenas na mudança do espaço amostral. Este estudo foi motivado pelo fato de Hoel (1976) somente sugerir tal interpretação, não entrando, entretanto, em maiores detalhes. Ao propor uma interpretação frequentista alternativa para o intervalo de tolerância, o trabalho em questão procurou um melhor entendimento para o assunto abordado. Para se demonstrar que esta interpretação alternativa é valida, recorreu-se ao teorema ergódico.*
Palavras-chave: *intervalos de tolerância, teorema ergódico, interpretação alternativa.*

1 INTRODUÇÃO

Na construção de intervalos estatísticos frequentistas supõe-se que sejam realizadas inúmeras repetições do experimento. Porém, na prática, somente um experimento de amostragem é levado a efeito; consequentemente, apenas a primeira amostra e o primeiro intervalo são considerados. Não ocorrem várias repetições do mesmo experimento (isto é, a obtenção de várias amostras de tamanho n repetidas um grande número de vezes - “long run”), a fim de garantir se realmente 100(1-α)% dos intervalos obtidos contêm o parâmetro. Com base **em um único** experimento é feita a afirmação de que há 100(1 – α)% de confiança de que o verdadeiro parâmetro da população em estudo esteja contido dentro de um intervalo (Hoel, 1976; Silva, 2008).

Assim, Hoel (1976) observa, de passagem, que esta interpretação carece de realização prática e sugere uma interpretação alternativa: se, para muitos experimentos diferentes, porém, com um mesmo coeficiente de confiança 100(1– α)%, forem feitas estimativas para o intervalo correspondente, então, 100(1–α)% de tais intervalos construídos serão verdadeiros na longa seqüência desses experimentos diferentes, semelhantes **apenas** quanto ao coeficiente de confiança. Entretanto o referido autor somente sugere tal interpretação, não entrando em maiores detalhes. Com base na idéia de Hoel (1976), é proposto, neste trabalho, uma interpretação freqüentista alternativa para o intervalo de tolerância, vislumbrando um melhor entendimento do assunto em questão.

2 ALGUMAS DEFINIÇÕES E O TEOREMA ERGÓDICO

Para um melhor entendimento do estudo realizado neste trabalho é necessário que se apresente, neste momento, algumas definições, o teorema ergódico e outros conceitos.

[1] Email:alessandrasilva@ufgd.edu.br ou alessandraquerino@yahoo.com.br
[2] Email: marcelo.oliveira@ufla.br

2.1 Teorema Ergódico

Definição 1 (Processo Estocástico): Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas em um conjunto A, $\{X(s),\ s \in A\}$. Considere o caso em que A é um subconjunto de $\mathbb{R}^p$, portanto, as variáveis aleatórias estão indexadas por p-índices $\{X(s),\ s \in A \subset \mathbb{R}^p\}$ (Papoulis, 1965).

Sob condições de regularidade é possível definir a integral de X(t), no seguinte sentido: todas as variáveis aleatórias X(t) estão definidas no mesmo espaço amostral. Fixando um evento ω, X(t)(ω) define uma função de variável real (t) e valores reais x(t)(ω). Tal função pode ser integrada, $\int_a^b X(t)(\omega)dt$.

Define-se então a variável aleatória $\int_a^b X(t)dt$ de forma que ω é um evento, então $\left(\int_a^b X(t)dt\right)(\omega) = \int_a^b X(t)(\omega)dt$.

Definição 2 (Variável Aleatória Tempo Médio): Agora, pode-se definir a variável aleatória tempo médio por $\eta_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$.

Definição 3 (Processo Estocástico Estacionário): Um processo estocástico é dito estacionário se E[X(t)] = η, sendo η constante.

Para processos estocásticos estacionários, sob condições de regularidade $\left(\lim_{t\to\infty} \mathrm{Var}(X(t)) = 0\right)$, que não são muito restritivas, vale o seguinte Teorema.

Teorema (Ergódico): $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = E[X(t)] = \eta$ (Papoulis, 1965)

O teorema ergódico aqui apresentado será o elo de ligação entre a interpretação tradicional, baseada no espaço amostral do experimento e a interpretação alternativa baseada no espaço amostral sugerido neste trabalho.

2.2 Intervalos de tolerância

Definição 4 (Intervalos de Tolerância): Conforme Walpole & Myers (1985), supondo que uma variável aleatória X tenha distribuição normal com média μ e variância σ^2, ambos desconhecidos. Para uma amostra aleatória de n observações, determinam-se a média amostral $\bar{X}$ e o desvio padrão S. Os limites de tolerância são dados por $\bar{X} \pm kS$, com 100(1-α)% de confiança, que os limites dados contenham pelo menos a proporção 100γ% da população, isto é,

$$P\left[P_X\left(\bar{X} - kS < X < \bar{X} + kS\right) > \gamma\right] = 1\text{-}\alpha$$

em que k é um valor tabelado em função de 1-α, γ e do tamanho n da amostra.

2.2.1 Interpretação do intervalo de tolerância

Segundo Hahn & Meeker (1991), um intervalo de tolerância com grau de confiança de 100(1 - α)%, para conter pelo menos uma proporção γ da população, é interpretado da seguinte forma: se, repetidamente, forem calculados tais intervalos de tolerância de muitos grupos independentes de amostras aleatórias, em 100(1-α)% dos intervalos devem, ao longo do tempo, corretamente ser incluídos pelo menos 100% γ dos valores da população.

3 DESENVOLVIMENTO

Para melhor entender o que está sendo proposto, considere como um exemplo ilustrativo, em uma empresa de transporte de cargas, a criação de uma central, chamada de Central Contra o Desperdício de Combustível (CCDC), na gestão de direção econômica. A esta central sempre chegam demandas para a decisão se um dado veículo (no nosso caso, caminhão) está com consumo de combustível elevado, normal ou baixo, os quais podem receber como solução intervalos de tolerância de 100(1 – α)% de confiança (maiores detalhes em Silva (2008))

Na interpretação tradicional, como já dito anteriormente, imagina-se que se repita infinitas vezes o mesmo experimento, ou seja, deve considerar-se, neste caso, o mesmo veículo, a mesma rota, o mesmo motorista, o mesmo peso da carga, as mesmas condições climáticas, etc. e fazer com que isso ocorra infinitas vezes. Na prática, isso não seria viável, uma vez que o mesmo motorista pode fazer apenas uma viagem com o mesmo caminhão X, com o mesmo peso de carga Y, nas mesmas condições climáticas, nas mesmas condições viárias, etc. Assim não seria possível utilizar a idéia de construção de intervalos de tolerância com interpretação tradicional, pelo fato de serem consideradas infinitas repetições do mesmo experimento. A forma alternativa sugerida por Hoel (1976) leva a fazer a mudança do espaço amostral do experimento para o espaço amostral do "analista de dados", o qual irá determinar soluções para cada viagem e este construirá intervalos de tolerância para cada situação (ou seja, para cada chamada recebida pela central). Assim, em vários problemas solucionados ao longo do tempo (tempo de vida da central), terá que 100(1 – α)% deles estarão corretos e 100α % não estariam.

A interpretação do intervalo de tolerância do espaço amostral tradicional prevê muitas repetições do experimento, enquanto a proposição (ou interpretação) alternativa prevê muitas situações diferentes, cada uma delas repetida uma única vez.

A pergunta que surge é: então, por que não usar a inferência bayesiana para solucionar esse problema? A inferência bayesiana considera o parâmetro como variável aleatória e aqui não é isso que está sendo considerado. Nesta interpretação alternativa, mudando o espaço amostral, a interpretação de probabilidade continua sendo frequentista e todos os parâmetros continuam sendo **números** desconhecidos e não variáveis aleatórias. Além disso, a vantagem é que o espaço amostral continua não necessitando de uma priori.

Suponha que a central CCDC recebe a chamada de um determinado motorista, neste exato momento e tem que passar algumas informações, por exemplo, “você deveria abastecer na quilometragem tal”. Neste contexto, seriam construídos intervalos de tolerância. Desta forma, construir-se-á em cada chamada um intervalo de tolerância com probabilidade $100(1-\alpha)\%$ de “acertar”.

Imagine que, ao longo do tempo, a central receba inúmeros problemas, que necessitem da utilização de intervalos de tolerância citados anteriormente. Em cada problema, poderá determinar a solução correta ou não. Assim, ao longo de sua vida, terão resolvido n problemas deste tipo.

Considere a população de muitas repetições de intervalos de tolerância construídos na história de vida da central, ou seja, todas as chamadas recebidas no decorrer de sua existência com o conseqüente intervalo construído e a decisão sobre o consumo (alto, normal ou baixo). Esta decisão pode estar correta ou não, em função do intervalo construído estar correto ou não. Portanto, o conjunto de todos os resultados possíveis será do tipo “acerta o intervalo” = 1 ou “erra” = 0, ou seja, o espaço amostral considerado é dado por $\mathbf{\Omega}= \{0, 1\}$.

Agora, considere Y(n) uma variável aleatória indicadora do evento “acerta” na n-ésima chamada, isto é,

$$\mathrm{Y(n)} = \begin{cases} 1, \text{ se o n-ésimo intervalo está correto} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Desta forma, cada intervalo de $100(1-\alpha)\%$ de confiança construído pela central, terá apenas dois resultados possíveis, que serão sucesso= “acertar” e fracasso = “errar”, com as respectivas probabilidades iguais a p = probabilidade de acertar = $100(1-\alpha)\%$ e q = 1- p = probabilidade de errar = $100\alpha\ \%$.

Assim, Y(n) tem uma distribuição Bernoulli com parâmetro p, ou seja, Y(n) ~ Bernoulli(p), sendo a média dada por E[Y(n)] = p e a variância por Var[Y(n)] = pq.

Pode-se definir o número de acertos em n chamadas como sendo $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y(i)}$. Sabe-se que $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y(i)} \sim$ Binomial(n, p), em que n é o número de chamadas recebidas na central. Além disso, a média é dada por E[Y(n)] = np e a variância por Var[Y(n)] = npq.

Seja X(n) uma variável aleatória definida pelo quociente entre o número de acertos em n chamadas e as n chamadas, isto é, $\mathrm{X(n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y(i)}}{n}$. Logo, X(n) = proporção de acertos em n chamadas $= \hat{p}$.

Mood et al. (1974) citam que $\hat{p} \xrightarrow{D} N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$, em que $\xrightarrow{D}$ denota convergência em distribuição à medida que n tende ao infinito. Evidências empíricas sugerem que a convergência é satisfatória quando np e npq são ambos maiores que 5. Assim,

$$X(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y(i)}{n} = \hat{p} \sim N\left(p, \frac{pq}{n}\right).$$

Para verificar se a seqüência de intervalos construídos corretamente ao longo da vida da central contra o desperdício tenderá a uma probabilidade p de acertos, ou seja, X(n) converge estocasticamente a p, basta recorrer ao teorema ergódico. Note que, segundo o referido teorema, são validas as seguintes afirmações:

1) $X(n) \xrightarrow{P} p$, ou seja, que X(n) converge em probabilidade a p;
2) pressupondo-se que X(n) não são autocorrelacionados, deve-se verificar que Var[X(n)] tende a zero quando n tende a infinito.

Para mostrar $X(n) \xrightarrow{P} p$, será utilizado o seguinte corolário (Lei dos Grandes Números de Bernoulli) citado em James (2002): considere uma seqüência de ensaios binomiais independentes, tendo a mesma probabilidade p de "sucesso" em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos primeiros n ensaios, então, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$. Neste trabalho, o $\frac{S_n}{n}$ é equivalente ao X(n). Portanto, pode-se dizer que $X(n) \xrightarrow{P} p$, satisfazendo o item (1) do teorema ergódico.

Supondo-se X(n) não autocorrelacionados, para n = 1, 2, ... tem-se que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{pq}{n} = 0.$$

o que verifica o item (2) do teorema ergódico.

Portanto, pode-se dizer que X(n) converge para p. Isto é, que, ao longo de vida da Central Contra o Desperdício, a seqüência de intervalos construídos corretamente tende a uma probabilidade p.

Graficamente, uma possível situação, é apresentada na Figura 1, que se refere ao quociente entre o número de acertos de intervalos construídos ao longo da vida da central em n chamadas. Note que para efeito de ilustração prática, sem perda de generalidade, foi considerado p = 100(1 – α)% = =95%.

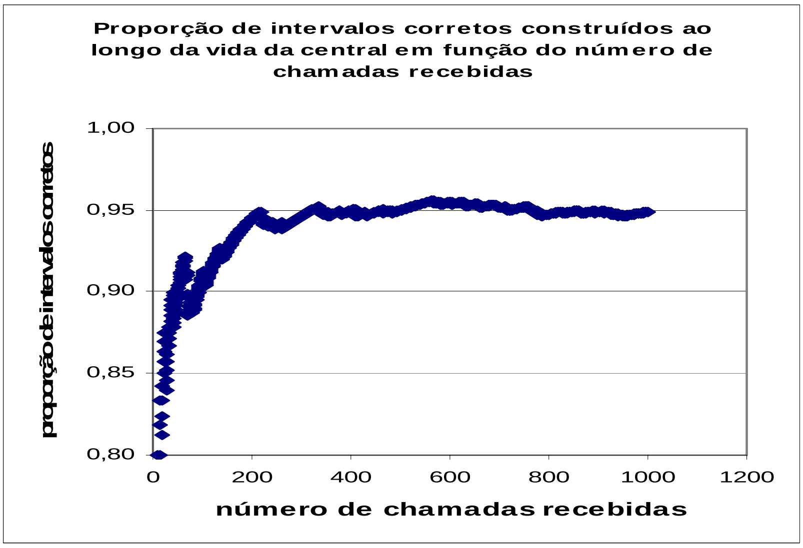

FIGURA 1: Proporção de intervalos corretos construídos ao longo da vida da central, em função do número de chamadas recebidas.

4 CONCLUSÃO

Utilizando a interpretação alternativa dos intervalos de tolerância frequentista, baseando-se apenas na mudança do espaço amostral, verificou-se que realmente é valida a sugestão proposta por Hoel (1976).

O exemplo ilustrativo apresentado neste trabalho mostrou como esta interpretação pode ser interessante e conveniente para solução de problemas práticos. Outro fato a ser considerado é que esta interpretação alternativa pode ser estendida para outros intervalos estatísticos frequentistas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HAHN, G. J.; MEEKER W. Q. *Statistical intervals: a guide for practitioners*. New York: J. Wiley. 1991. 392p.

HOEL, P. G. *Elementary statistics.* 4. ed. New York: J. Wiley, 1976. 361 p.

JAMES, B. R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário***.** 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. 299 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the theory of statistics.* 3. ed. Tokyo: McGraw Hill, 1974. 564 p.

PAPOULIS, A. *Probability, random variables, and stochastic processes.* Tokyo: McGraw-Hill, 1965. 583 p.

SILVA, A. Q. da. *Intervalos de tolerância aplicados em um programa de direção econômica.* 2008. 95 p. Tese (Doutorado em Estatística e Experimentação Agropecuária) – Universidade Federal de Lavras, Lavras.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H. *Probability and statistics for engineers and scientists.* 3. ed. New York: MacMillan, 1985.